المحاضرة السابعة

مثـــال

افراض ان قالبا قد قذف بسرعة ابتدائية v_0 على سطح مستو املس، وكان متأثرا بمقاومة الهواء التي تتناســـب مع v، اى ان $F(v)= -cv$ حيث c يمثل ثابت التناســـب (المحور - x باتجاه الحركة)

الحل

المعادلة التفاضلية للحركة هي :

$$-cv = m\,\frac{dv}{dt}$$

والتي تعطي عند تكاملها

$$t = \int_{vo}^{v} -\frac{mdv}{cv} = -m\backslash c\,\ln\frac{v}{vo}$$

يمكننا حلها بسـهولة للسـرعة v كدالة للزمن t ويكون ذلك بضـرب المتسـاوية بالكمية $-\frac{c}{m}$ واخذ الاس (exponent) لطرفيها فالنتيجة تكون

$$v = v_o e^{-ct/m}$$

اى ان السرعة تتناقص اسيا مع الزمن. وعند تكاملها للمرة الثانية نحصل على:

$$x = \int_0^t v_0 e^{-ct/m} \, dt = \frac{mv_0}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$$

نرى، من المعادلة المذكورة اعلاه، ان القالب لا يتعدى ابدا مسافة نهائية مقدارها mv_0 /c

ويمكن كذلك كتابة المعادلة التفاضلية على النحو التالي:

$$-cv = mv \frac{dv}{dx}$$

كما في المعادلة اعلاه وبحذف العامل المشترك V من طرفي المتساوية،

وتكاملها تحصل على

$$-c \int_0^x dx = m \int_{v_0}^v dv$$

$$-\frac{c}{m} x = v - v_0$$

او

$$v_0 - \frac{c}{m} x = v = \frac{dx}{dt}$$

اى ان سرعة القالب تتغير خطيا مع المسافة. وبتكاملها مرة اخرى نحصل على:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v_0 - (c/m)x} = \frac{-m}{c} \ln\left(\frac{v_0 - (c/m)x}{v_0}\right)$$

وعند حل هذه المعادلة للموضع x (بضربها بالكمية $-c/m$ واخذ الاس)،

تحصل على نفس العلاقة بين x , t التي حصلنا عليها سابقا.

8-3) القوة كدالة للزمن فقط. The Force as a Function of Time Only

اذا اعتمدت القوة بصورة صريحة على الزمن، فيمكن تكامل معادلة الحركة:

$$F(t) = m\frac{dv}{dt}$$

مباشرة، وذلك

$$\frac{dx}{dt} = \int \frac{F(t)}{m}\, dt = v(t)$$

معطية v كدالة للزمن t. وبتكاملها المرة الثانية تحصل على × كدالة للزمن t أي

$$x = \int v(t)\, dt = \int\left[\int \frac{F(t')}{m}\, dt\right] dt$$

ويجب ملاحظة الحالة التي تكون فيها القوة معلومة كدالة للزمن t فقط، فيكون حل معادلة الحركة على شكل تكامل ثنائي بسيط . اما في الحالات الاخرى جميعها فيجب استعمال الطرق المتنوعة لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية لإيجاد الموضع x كدالة للزمن t .

مثال

قالب كان ابتدائيا في حالة السكون على سطح افقي املس· في الزمن t=0 ، سلطت عليه قوة افقية متزايدة تزايدا ثابتا (F = ct).

جد السرعة والازاحة كدوال للزمن .؟

الحل

من المعادلة التفاضلية للحركة

$$ct = m\frac{dv}{dt}$$

فان

$$v = \frac{1}{m}\int_0^t ct\,dt = \frac{ct^2}{2m}$$

و

$$x = \int_0^t \frac{ct^2}{2m}\, dt = \frac{ct^3}{6m}$$

حيث ان موضع القالب الابتدائي كان في نقطة الاصل (x =0)

3-9) الحركة الشاقولية في وسط مقاوم - سرعة المنتهي

Vertical Motion in a Resisting Medium. Terminal Velocity

يتعرض الجسم الساقط شاقوليا في الهواء او فى إى مائع آخر الى مقاومة اللزوجه viscous resistance) فاذا كانت المقاومة تتناسب مع السرعة v مرفوعة للقوة الاولى (الحالة الخطية)، تستطيع تمثيل قوة المقاومة بالكمية cv- بصرف النظر عن اشارة cv لان المقاومة تكون دائما معاكسة لاتجاه الحركة. وثابت التناسب c يعتمد على حجم وشكل الجسم وعلى لزوجة المائع.
لنأخذ المحير - x موجبا الى الاعلى. عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

-mg-cv=mdv\dt

ولما كانت القوة دالة للسرعة v لذ لك نحصل على

$$t = \int \frac{m\,dv}{F(v)} = \int_{v_0}^{v} \frac{m\,dv}{-mg-cv} = -\frac{m}{c} \ln \frac{mg+cv}{mg+cv_0}$$

والتي يمكن حلها بسهولة للسرعة v اى

$$v = -\frac{mg}{c} + \left(\frac{mg}{c} + v_0\right) e^{-ct/m}$$

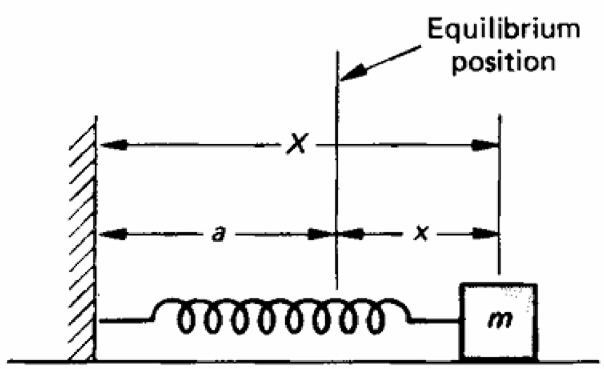
يهبط الحد الاسي الى مقدار مهمل بعد مرور فترة زمنية كافية ($t > \frac{m}{c}$) وبذلك تقترب السرعة من الغاية mg/c -. وتسمى سرعة الغاية للجسم الساقط بـ سرعة المنتهي terminal velocity ، وهي تلك السرعة التي تكون فيها قوة المقاومة مساوية تماما ومعاكسة لثقل الجسم بحيث تكون القوة الكلية على الجسم تساوى صفرا. ويسمى مقدار سرعة المنتهي بانطلاق المنتهي terminal speed .

.

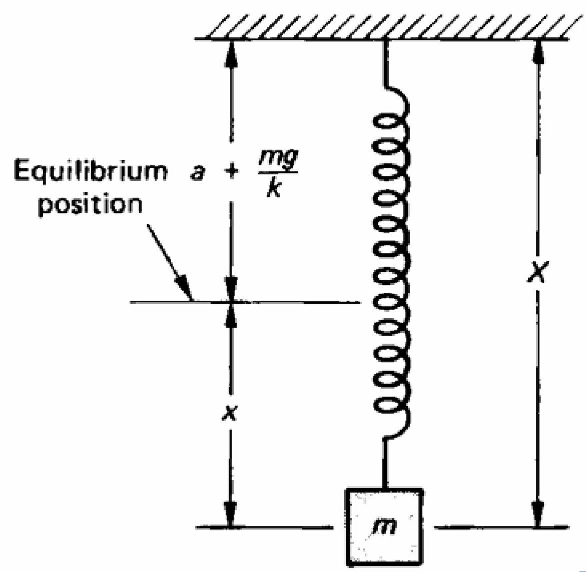
(10-3) القوة المعيدة الخطية- الحركة التوافقية Linear Restoring Force .Harmonic Motion

من اهم حالات الحركة على خط مستقيم من الناحية العملية والنظرية هي تلك الحركة التي تحدثها قوة معيدة خطية هذة القوة تتناسب مقدارها مع الازاحة للجسيم من موضع الاستقرار واتجاهها سكون دائما مضادا لاتجاه الازاحة. ومن امثلة هذه القوى القوة التي يسببها وتر او نابض يخضعان لقانون هوك [F=-K(X-a)=-kx

حيث X يمثل الطول الكلي و a طول النابض عندما يكون غير مخطط (الثقل يساوي 0) مثل المتغير X-a , x ازاحة النابض من موضع الاستقرار ويسمى ثابت k بالمرونة لنفرض ان جسم كتلته m قد ربط بالنابض كما هومبين بالشكل ادناه:-



(أ)



(ب)

الشكل أعلاه تمثيل المتذبذب التوافقي الخطي بواسطة جسم كتلته . ونابض (أ) الحركة الافقية (ب) الحركة الشاقولية

القوة المؤثرة على الجسيم تعطي من المعادلة اعلاه.

لنفترض ان نفس النابض الجسم علقا شاقوليا كما هومبين في الشكل (أ و ب) القوة الكلية التي توثر على الجسيم الان هي

$$F = -k (X - a) + mg$$

جيث الاتجاه الموجب نحو الأسفل . والان انقيس x في الحالة الأخيرة بالنسبة لموضع الاستقرار الجديد . $x = X - a - mg/k$ هذا يعطى $F = - kx$ مرة ثانية وهكذا المعادلة التفاضلية للحركة

في اى من الحالتين تكون $-kx = m\ddot{x}$

او $\ddot{x}m + kx = 0$

تصادفنا المعادلة التفاضلية للحركة المذكورة اعلاء في مسائل فيزيائية متنوعة وكثيرة . في المثال الخاص الذى نستخدمه هنا، الثابتان k ، m يمثلان كتلة الجسم ومرونة النابض على التتالي والازاحة x هي مسافة. وكما سنرى فيما بعد ان نفس هذه المعادلة ستستعمل في حالة البندول ولكن الازاحة تكون زاوية والثوابت هي التعجيل الارضي وطول البندول • كما ان هذه المعادلة تطبق في بعض الدوائر الكهربائية الخاصة، ولكن الثوابت تمثل بيرمترات (Parameters) الدائرة، والكمية x تمثل التيار الكهربائي او الفولتية يمكن حل المعادلة بطرق عديدة . وهناك صنف مهم من المعادلات التفاضلية يعرف بالمعادلات التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة . عدد كبير من المعادلات التفاضلية في الفيزياء أن لم تكن منتظمة هي معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية . وستستخدم طريقة التجربة لحل المعادلة والتي ستكون فيها الدالة Ae^{qt} في تجربة الحل وq هو ثابت علينا ايجاد مقداره . فاذا كان $X = Ae^{qt}$ هو فعلا الحل عندئذ يجب ان نحصل لجميع قيم t على

$$m \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{qt}) + k (Ae^{qt}) = 0$$

وعند اختصار العوامل المشتركة تحصل على المعادلة التالية

$$mq^2 + k = 0$$

أي ان

$$q = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_o$$

حيث

$$\omega_o = \sqrt{k/m} \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

ولما كانت حلول المعادلة التفاضلية الخطية تجمع (اى ،اذا كان f_1, f_2 حلين، عندئذ مجمعها f_2, f_1 يكون حلا ايضا) اذن الحل العام للمعادلة هو

$$x = A_+ e^{i \omega_o t} + A_- e^{-i \omega_o t}$$

ولما كان $e^{iu} = \cos u + I \sin u$. فالا شكال الاخرى للحلول هي

$$x = a \sin w_o t + b \cos w_o t$$

او

$$x = A \cos (w_o t + \theta_o)$$

وتحسب قيم ثوابت التكامل في الحلول المذكورة توا من الشروط الابتدائية وبالتعويض المباشر يمكن التحقق من ان جميع التعابير الجبرية الثلاثة هي حلول. الحركة هي تذبذب منحني الجيب للازاحة x . ولهذا السبب تسمى غلبا بالمعادلة التفاضلية للمتذبذب التوافقي او المتذبذب الخطي . يسمى المعامل w_o بالتردد الزاوي angular frequency والقيمة العظمى للازاحة x بسعة التذبذب، وهو الثابت A في المعادلة، او $(a^2 , b^2)^{1/2}$ وزمن الذبذبة " Period " T_oهو الزمن اللازم لدورة كاملة ، كما هو بين في الشكل (٣-٥)، اى ان زمن الذبذبة هو الزمن الذى يزداد فيه wt بقدار 2π أي

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ويعرّف التردد الخطي fo للمتذبذب بعدد الدورات في وحدة الزمن

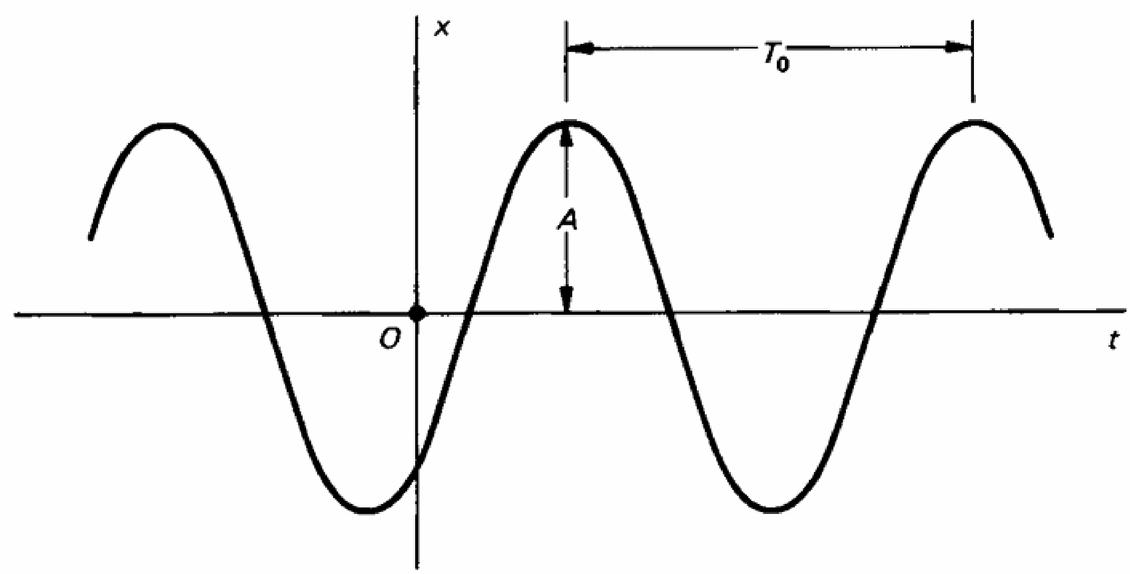
اذ ن

$$\omega_o = 2\pi f_o$$

و

$$f_o = \frac{1}{T_o} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

تستعمل كلمة "التردد "عادة للتردد الزاوى او الخطي ويمكن التمييز بينهما من سياق الكلام



الشكل اعلاه العلاقة بين الازاحة والزمن

للمتذبذب التوافقي