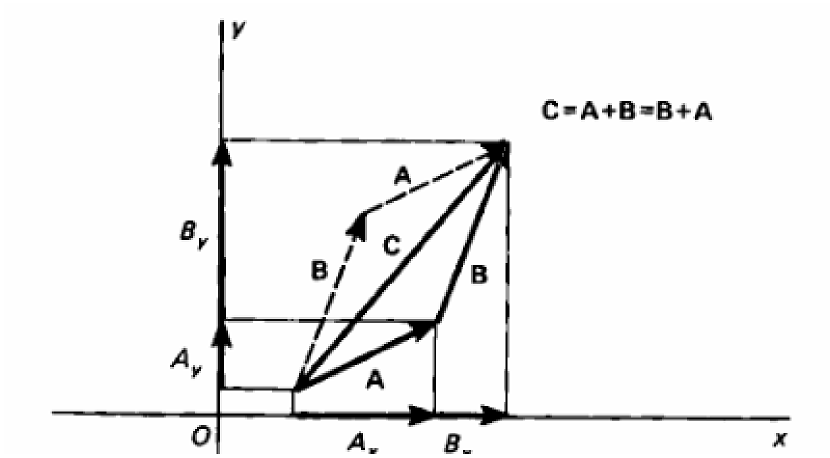
المحاضرة الثانية

جمع التجهات   Vector Addition

الجمع الا تجاهي لمتجهين يساوى الضلع الثالث لمثلث، ضلعاه الاخران يساويان المتجهين المعنيين. الشكل (١-1) يضح جمع المتجهات ■ كذ لك يعين

$$\vec{A} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



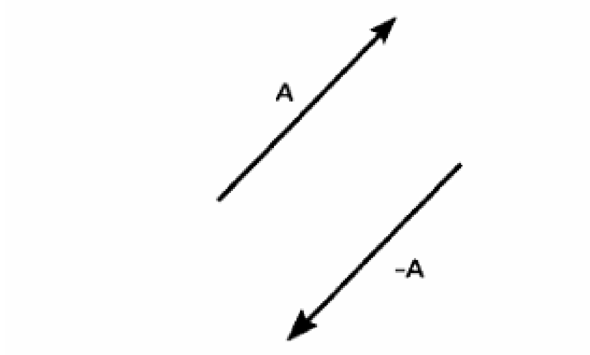
الشكل (1-1)الجمع لمتجهين

ضرب المتجه بكمية عددية   Hultiplication of a Vector by a Scalar

المتجه $\overrightarrow{c\,A}$ يوازى المتجه $\vec{A}$ وطوله c مرة اكبر من $\vec{A}$

عندما يكون c = -1 يعني ان اتجاء $\overrightarrow{-A}$ -هو معكوس اتجاء $\vec{A}$

كبا هو بين في الشكل



الشكل (2- 1)السالب للمتجهه

الضرب العددي The Soalar Produet

الضرب العدد ى لاى تجهين مثل $\vec{B}$, $\vec{A}$ يمثل بالرمز $\vec{A}\,.\,\vec{B}$

(A dot B) و هوكمية عددية تعرف بالمعادلة التالية:

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z$$

وينتج من التعريف المذكور انفا ان

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{B}\,.\,\vec{A}$$

لان $A_x\,B_x = B_x\,A_x$ وهلم جرا وينتج كذلك ما يلي:-

$$\vec{A}\,.(\,\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\,.\vec{B} + \vec{A}\,.\vec{C}$$

لاننا إذا استخدمنا التعريف أعلاه بالتغصيل نحصمل على: -

$$\vec{A}\,.(\,\vec{B} + \vec{C}) = A_x\,\left(B_x + C_x\right) + A_y\,\left(B_y + C_y\right) + z\,\left(B_z + C_z\right)$$

$$= A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z + A_x\,C_x + A_y\,C_y + A_z\,C_z$$

$$= \vec{A}\,.\vec{B} + \vec{A}\,.\vec{C}`$$

نتذكر من الهندسة التحليلية العلاقة التالية لجيب تمام الزاوية المحصورة

بين مستقيمين والتي هي :-

$$\cos\theta = \frac{A_x\, B_x + \ A_y\, B_y + \ A_z\, B_z}{\left(A_x{}^2 + \ A_y{}^2 + \ A_z{}^2\right)\ \left(B_x{}^2 + \ B_y{}^2 + \ B_z{}^2\right)}$$

وباستعمال المعادلتين اعلاه يمكن كتابة المعادلة المذكورة اعلاه على الشكل التالي : -

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\,.\vec{B}}{AB}$$

$$\vec{A}\,.\vec{B} = AB\cos\theta$$

هندسيا $\vec{A}\,.\vec{B}$ تساوى طول مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ مضروبا في طول $\vec{B}$. اذا كان الضرب العددى $\vec{A}\,.\vec{B}$ يساوى صفرا، عندئذ يكون $\vec{A}$. عمود يا على $\vec{B}$، على الا يكون اى من $\vec{B}$ او $\vec{A}$ مساويا للصغر.

ان مربع مقدار المتجه $\overrightarrow{A}$ ينتج من ضرب المتجه $\overrightarrow{A}$ في نفسه عدديا . أي ان

$$A^2 = |\vec{A}| = \ \overrightarrow{A}\,.\overrightarrow{A}$$

يمكن التحقق من صحة العلاقات التالية بسهولة .

$$\hat{\imath}.\hat{\imath} \ = \ \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \ \hat{k}.\hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath}.j = \ \hat{\jmath}.k = \ i.\hat{k} = 0$$

الضرب الاتجاهي The Vector Product

يمثل الضـــرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A}$ x $\vec{B}$ ويقرأ ($\vec{A}$ cross $\vec{B}$) ويعرف بالمتجه الذى مركباته تعطي بالمعادلة التالية :

$$\vec{A}\,x\,\vec{B} = (\,A_yB_z - \; A_zB_y\,,\, A_zB_x - \; A_xB_z\;,\, A_xB_y - \; A_yB_x)$$

$$\hat{\imath}\,x\,\hat{\imath} \;=\; \hat{\jmath}\,x\,\hat{\jmath} = \;\hat{k}\,x\;\hat{k} = 0$$

$$\hat{\jmath}\,x\;\hat{k} = \;\hat{\imath} = -\;\hat{k}x\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\imath}\,x\,\hat{\jmath} \;=\; \hat{\imath} \;= -\,\hat{\jmath}\,x\;\hat{\imath}$$

$$\hat{k}\,x\,\hat{\imath} \;=\; \hat{\jmath} \;= -\,\hat{\imath}\,x\;\hat{k}$$

فمثلا

$\hat{\imath}\,x\,\hat{\jmath}$ = (0 - 0, 0 - 0, 1 – 0) = (0,0,1) = $\hat{k}$

ويمكن بسهولة برهنة بقية المعادلات بنفس الاسلوب.

التغير الهندسي للضرب الاتجاهي Geometric Interpretation of the cross Product

ان تمثيل الضرب الاتجاهي بصيغة – i j k

$\vec{A}\,x\,\vec{B}$ = $\hat{\imath}$ (A_yB_z - A_zB_y) + $\hat{\jmath}$ (A_zB_x - A_xB_z) + $\hat{k}$ (A_xB_y - A_yB_x)

وكل حد داخل الاقواس مساو الى محدد ٠ اى

$$\vec{A}\;x\;\vec{B} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_yA_x \\ B_yB_x \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_zA_x \\ B_zB_x \end{vmatrix} + \;\hat{k}\begin{vmatrix} A_xA_y \\ B_xB_y \end{vmatrix}$$

وأخيرا
$$\vec{A}\ x\ \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد يمكن التحقق من صحته بسهولة . وصيغة المحدد اداة ملائمة تساعدنا على تذكر تعريف الضرب الاتجاهي .من خراص المحددات يمكن على الفور معرفة ما اذا كان التجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$

اى ما اذا كان $\vec{A} = 0\vec{B}$ وذلك عندما يكون الصفان الاخيران من المحدد متناسبين اى تكون قيمة المحدد تساوى صفرا.

اذن يكون الضرب الاتجاهي لمتجهين متوازيين يساوى صفرا. لنحسب مقدار الضرب الاتجاهي عندنا :-

$$\left|\vec{A}\ x\ \vec{B}\right|^2 = (A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2$$

وبقليل من الصبر يمكن تبسيطها الى الشكل التالي

$$\left|\vec{A}\ x\ \vec{B}\right|^2 = (A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2)(B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2) - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)^2$$

او من تعريف الضرب العددى ، يمكن كتابة المعادلة المذكورة اعلاه على الشكل التالي

$$\left|\vec{A}\ x\ \vec{B}\right|^2 = A^2 B^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2$$

وباخذ الجذر التربيعي لطرفي هذه المعادلة وباستخدام المعادلة اعلاه نستطيع ان نكتب مقدار الضرب الاتجاهي على النحو التالي

$$\left|\vec{A}\ x\ \vec{B}\right| = AB\,(1-\cos^2\theta) = AB\ \sin\theta$$

تمثل الزاوية بين θ حيث $\vec{A}, \vec{B}$

لتفسير الضرب الاتجاهي هندسيا نلاحظ ان المتجه $\vec{C} = \vec{A}\ x\ \vec{B}$ يكون عمود يا على كل من $\vec{A}, \vec{B}$ لان

$$\vec{A}.\vec{C} = A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

$$= A_x(A_yB_z - A_zB_y) + A_y(A_zB_x - A_xB_z) + A_z(A_xB_y - A_yB_x) = 0$$

$\vec{B}.\vec{C} = 0$ اذن المتجه $\vec{C}$ يكون عموديا على المستوى لذى يحوي المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{A}$

ان اتجاه المتجه $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ يعين من فرضـــية كون المتجهات الثلاث $\vec{B}$ و $\vec{A}$ و $\vec{C}$ تشـــكل ثلاثي اليد اليمنى (هذا ينسجم. مع النتيجة التي برهنت سابقا، فمن ثلاثي اليد اليمنى ijk حصلنا على

ان نكتب من المعادلة $\hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = \hat{k}$ اذن نستطيع ان نكتب من المعادلة أعلاه مايلي

$\vec{A}\, x\, \vec{B}$= (AB sin θ)

حيث n تمثل الوحدة المتجهة العمودية على مستوى المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{A}$ ويعين اتجاه $\vec{n}$ من قاعدة اليد اليمنى، اى، في اتجاه تقوم لولب (برغي) أيمن يدور من الاتجاه الموجب للمتجه $\vec{A}$ الى $\vec{B}$ خلال الزاوية المحصورة بينهما،

امثلة

اذا علمت ان

$\vec{A}$=**2** $\hat{\imath}$ **+** $\hat{\jmath}$ **-** $\hat{k}$, , $\vec{B}$**=**$\hat{\imath}$ **-** $\hat{\jmath}$ **+ 2** $\hat{k}$

اوجد

$\vec{A}\, x\, \vec{B}$, $\vec{A}\,.\vec{B}$

$\vec{A}\, x\, \vec{B}$= (2) (1) + (1) (-1) + (-1) (2) = 2-1-2 = -1