المحاضرة العاشرة

١٠ - ٨) دالة هملتن • معسادلات هملتن The Hamiltonian Function. Hamilton's Equations

افرض الدالة التالية للاحداثيات المعممة

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$$

فالطاقة الحركية T لمنظومات ديناميكية بسيطة هي دالة متجانسة

من الدرجة الثانية في الـ q 's والطاقة الكامنة V هي دالة فى الـ q's نقط ، بحيث ان

$$L = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k)$$

والان من نظرية اويلر للدوال المتجانسة عندنا

$$\sum_k \dot{q}_k p_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

اذ ن

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = 2T - (T - V) = T + V$$

اى ان الدالة H تسـاوى الطاقة الكلية من نوع المنظومات التي فرضـناها افرض اننا ناخذ بنظر الاعتبار حلول المعادلات n التالية

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

لـ p's بدلالة الـ $\dot{q}$'s اي

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(p_k, q_k)$$

تنص نظرية اويلر لدالة متجانسة f من درجة n في المتغييرات

x_1 , x_2 .... x_r اى ان

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = nf$$

بهذه المعادلات يمكتنا عندئذ ان نعبر عن H كدالة لـ p's والـ q's

$$H(p_k, q_k) = \sum_k p_k \dot{q}_k(p_k, q_k) - L$$

لنحسب تغيير الدالة H الذى يقابل تغيير q_k , P_k عندنا

$$\delta H = \sum_k \left[p_k\, \delta\dot{q}_k + \dot{q}_k\, \delta p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, \delta\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\, \delta q_k \right]$$

ويختصـر في داخل القوسـين الحد الاول مع الحد الثالث لان $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ من التعريف . كذلك ، لما كانت معادلات لاكرانج يمكن كتابتها كالاتي:

$$\dot{p}_k = \partial L/\partial q_k,$$

فيمكتنا كتابة

$$\delta H = \sum_k [\dot{q}_k\, \delta p_k - \dot{p}_k\, \delta q_k]$$

والان التغير في H يجب ان يعطى من المعادلة

$$\delta H = \sum_k \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right]$$

وينتج من هذا ان

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$
$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

هذه المعادلات تســـمى بمعادلات هملتن القانونية للحركة Hamilton's canonieal equations of motion

وهي تتكون من 2n من المعادلات التفاضـــلية من الدرجة الاولى بينما تتكون معادلات لاكرانج من n من المعادلات من الدرجة الثانية ، لقد استنبطنا معادلات هملتن للمنظومات المحافظة البسيطة. ويمكن البرهنة على ان المعادلات تصـح ايضـا للمنظومات الاكثر عمومية كالمنظومات غير المحافظة، اى المنظومات التي تحتوى فيها دالة الطاقة الكامنة على الـــــ $\dot{q}$'s, وللمنظومات التى يحتوى فيها **L** على الزمن بوضـح، ولكن ليس من الضـروري فى هذه الحالات ان تكون الطاقة الكلية مساوية الى **H**. وسـوف يصـادف الطالب معادلات هملتن عندما يدرس الميكانيك الكمي (النظرية الاسـاسـية للظاهرة الذرية) وهناك تطبيقات ايضـا لمعادلات هملتن فى الميكانيك السماوية.

امثلة

١- اشتق معادلات هملتن للحركة لمتذبذب توافقي احادى البعد . عندنا

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad V = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

اذن

$$H = T + V = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}x^2$$

فمعادلات الحركة

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

عندئذ تصبح

$$\frac{p}{m} = \dot{x} \qquad kx = -\dot{p}$$

المعادلة الاولى عبارة عن نص ثان للعلاقة بين السرعة والزخم في هذه الحالة. وعند استعمال المعادلة الاولى، يمكن كتابة الثانية كما يلى:

$$kx = -\frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

او عند اعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

وهذه معادلة المتذبذب التوافقي المعروفة

٢- جد معادلات هملتن لحركة جسيم في مجال مركزى .

هنا عندنا

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$
$$V = V(r)$$

بالإحداثيات القطبية . اذن

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$
$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

ووفقا لذلك

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

معادلات هملتن

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} \qquad \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta$$

عندئذ تصبح

$$\frac{p_r}{m} = \dot{r}$$
$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} = -\dot{p}_r$$

$$\frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$$
$$0 = -\dot{p}_\theta$$

تطهر المعادلتان الآخرتان ثبوت الزخم الزاوى اى

$$p_\theta = \text{constant} = mr^2\dot{\theta} = h$$

ومن المعادلتان الاوليتان يعطيان

$$m\ddot{r} = \dot{p}_r = \frac{h^2}{mr^3} + F_r$$

لمعادلة الحركة القطبية ، حيث

$$F_r = -\partial V(r)/\partial r.$$

الواجب \\

اشتق معادلات هملتون لكل من :-

1- البندول البسيط

2- لجسيم يتدحرج على سطح مائل