المحاضرة التاسعة

(٤-١٠) بعض تطبيقات معادلات لاكرانج Some Applications of Lagrange's Equations

١- اختر محاور مناسبة لتمثيل شكل المنظومة العام .

٢- جد الطاقة الحركية T كدالة لهذه المحاور ومشتقاتها بالنسبة للزمن

٣ - اذا كانت المنظومة محافظة، جد الطاقة الكامنة V كدالة للاحداثيات

او اذا كانت المنظومة غير محافظة، جد القوى المعممة Q_k

(٤-١٠ - ١) المتذبذب التوافقي Harmonics Oscillator

خذ بنظر الاعتبار حالة متذبذب توافقي ذوبعد واحد وافرض ان هناك قوة تضاؤلا تتناسب مع السرعة . فالمنظومة اذن غير محافظة • اذا كانت x تمثل احداثي الازاحة عندئذ تصبح دالة لاكرانج كالاتي:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}kx^2$$

حيث m تشل الكتلة وk برمتر المرونه الاعتيادى .

اذ ن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

لتواجد قوة غير محافظة يمكن اســـتخدام معادلات لاكرانج بصـــيغة المعادلة وهكذا فان $Q' = -\dot{x}c$ ومعادلة الحركة تصبح .

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -c\dot{x} + (-kx)$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

هذا معادلة المتذبذب التوافقي المتضائل.

2-جسيم مفرد في مجال مركزى

لنجد معادلات لاكرانج للحركة لجسـيم يتحرك فى مسـتوتحت تأثير قوة مركزية • سـوف نختار الاحداثيات القطبيـة

$q_1 = r$, $q_2 = \theta$. عندئذ

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$
$$V = V(r)$$
$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

فمعادلات الحركة

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

١٠-٥) الزخوم المعممـة. الاحـداثيـات المهملـة Generalized Momenta. Ignorable coordinates

أفرض حركة جسيم منفرد يتحرك على خط مستقيم (حركة خطية) نطاقته الحركية تكون

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

حيث m تمثل كتلة الجسيم، و x احدائي موضعه . والان بدلا من تعريف زخم الجسيم P يحاصل الضرب $m\dot{x}$ يمكننا تعريف P بالكمية $\delta T / \delta \dot{x}$, أي

$P = \delta T/ \delta \dot{x} = m\dot{x}$

في حالة منظومة توصف بالإحداثيات المعممة $q_1 \cdots\cdots q_2 \cdots q_n$ الكميات F_k المعرفة بما يلي :

$$P_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$$

تسمى بالزخوم المعممة . عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرنج للمنظومة المحافظة كما يلي

$$P_k = \partial L/\partial \dot{q}_k = \partial T/\partial \dot{q}_k.$$

$$\dot{p}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0$$

افرض وبصورة خاصة ان احد الاحدائيات مثل $q\lambda$ لا يحتويه L بشكل ظاهر . عندئذ

$$\dot{p}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0$$

$$p_\lambda = \text{constant} = c_\lambda$$

في هذه الحالة يسمى $q\lambda$ بالاحدائي المهمل ignerable فالزخم المعمم المرافق للاحداثي المهمل اذن يكون ثابت حركة النظومة.

فمثلا، في مسالة الجسيم الذى ينزلق عطى سطح مائل . راينا ان دالة لاكرائج L لا تحتوى على الاحدائي x ، موضع السطح ٠ اذن يكون x احدائي مهمل في هذء الحالة٠

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m\dot{x}' \cos\theta = \text{constant}$$

وفي الحقيقة يمكننا ان نرى ، ان P_k هو المركية الافقية الكلية للزخم الخطي للمنظومة، ولما كانت لا توثر قوة افقية خارجية على المنظومة، فالمركية الافقية للزخم الخطي يجب ان تكون ثابتة .

مثال اخر على الاحداثي المهمل يتياجد في حالة حركة جسيم في مجال مركزى. في الاحداثيات القطبية

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

كما هو مبين. في هذه الحالة تكون θ هي الاحدائي المممل، و

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$$

هنا P_θ هومقدار الزخم الزاوى .

(١٠-٦) معادلات لاكرانج للقوى الدافعة Lagrange's Equations for Impulsive Forces

افرض ان لدينا منظومة داينامیکیة موصـــوفة بالاحداثيات المعممة q_k فيها جميع القوى المعممة المســـلطة Q_k تكون صفرا باستثناء فترة زمنية قصيرة $\mathcal{T}$. يمكننا تكامل معادلات لاكرانسج كما يلي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$

$$\int_0^\tau d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_k}\,dt + \int_0^\tau Q_k\,dt$$

الان اذا كانت Q_k تقترب من اللانهاية بطريقة بحيث ان الدفع المعمم

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau Q_k\,dt = \hat{P}_k$$

يتواجد ويكون محدودا، عندئذ التكامل $\int_0^\tau (\partial T/\partial q_k)\,dt$ يقترب من الصـــفر لان الكمية $\delta T/\delta\ q_k$ تبقى محدودة . يمكننا اذن كتابتة

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \hat{P}_k$$

للتغيرات فى الكميات $\partial T/\partial \dot{q}_k$ نتيجة تطبيق الدفع المعمم $\hat{P}_k$ على المنظومة للمنظومات التي لا تحتوى فيها دالة الجهد V على q's بشكل ظاهر بحيث $\partial T/\partial \dot{q}_k = \partial L/\partial \dot{q}_k = p_k,$ ، يمكنا كتابة المعادلة كما يلي:

$$\Delta p_k = \hat{P}_k$$

حيث P_k هوا لزخم المعمم المرافق للاحداثيات المعمة q_k.

يمكن ايجاد الدفوع المعممة $\hat{P}_k$ بكل بساطة من حساب الشغل الدفعي $\delta\hat{W}$ الذى يعطي من

$$\delta\hat{W} = \hat{\mathbf{P}}_a \cdot \delta\mathbf{s}_a + \cdots = \hat{P}_1\delta q_1 + \hat{P}_2\delta q_2 + \cdots = \sum_k \hat{P}_k\delta q_k$$

حيث $\hat{\mathbf{P}}_a \cdots$ هي الدفوع المســـلطة و $\delta\mathbf{s}_a \cdots$ هي ازاحات اعتباطية صـــغيرة من خلالها تعمل القوى الداقعة المسلطة (خاضعة الى مقيدات المنظومة).