المحاضرة الثامنة

معادلات لاكرانج Lagrange's Equations

اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي جوزيف لويس لاكرانج Joseph Louis Lagrange طريقة ممتازة ومفيدة للإيجاد معادلات حركة جميع المنظومات الديناميكية من خلال استخدام الاحداثيات المعممة Generalized Coordinates ان موضع الجسيم في الفضاء يمكن تعيينه تعينا كاملا بثلاث احداثيات· وقد تكون هذه، ديكارتيه، كروية، اسطوانية، اية ثلاثة بر مترات مختارة بصورة ملائمة , ونحتاج الى احداثيان فقط اذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستواو سطح ثابت· بينما اذا كان الجسيم يتحرك على خط مستقيم او منحني ثابت فعندئذ يكفي احداثي واحد. فى حالة منظومة متكونة من N من الجسيمات نحتاج بصورة عامة الى 3N من الاحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد

ويتطلب بصورة عامة أصغر عدد معين n لتعيين الشكل العام لمنظومة معينة· وسوف نرمز لهذه الاحداثيات بالرموز

$$q_1 , q_2 , q_3 \ldots\ldots\ldots q_n$$

والتي تسمى بالاحداثيات المعممة generalized coordinates. قد يكون الاحداثي q_K زاوية او مسافة • فاذا كان بالإضافة ألى تعيين شكل المنظومة العام، بإمكان اى احداثي ان يتغيير بصورة مستقلة عن الاحداثيات الاخرى فعندئذ يقال عن المنظومة بانها هولونومك holonomic وفي هذه الحالة يساوى عدد الاحداثيات n عدد

درجات الحرية degrees of freedom للمنظومة . وفي منظومة ليست هولونوك ، لا تتغير جميع الاحد اثيات يصورة مستقلة عن بعضها البعض،

اذا كانت المنظومة متكونة من جسيم واحد، فيمكن كتابة الاحداثيات الديكارتيه كدوال للاحداثيات المعممة على النحو التالي:

درجة حرية واحدة - الحركة على منحن $x = x(q)$

درجتا حرية - الحركة على سطح $x = x(q_1 , q_2)$

$y = y(q_1 , q_2)$

ثلاث درجات حرية . الحركة في الفضاء $x = x(q_1 , q_2 , q_3)$

$y = y(q_1 , q_2 , q_3)$

$z = z(q_1 , q_2 , q_3)$

$x = x(q_1 , q_2)$

إفرض ان الاحداثيات q 's تتغير من القيم الابتدائية $(q_1 , q_2 \cdots)$. الى القيم المجاورة

$(q_1 + \delta q_1 , q_2 + \delta q_2)$. فالتغييرات التي تقابلها في الاحداثيات الديكارتيه هي كما يلي :

$$\delta x = (\delta x / \delta q_1)\, \delta q_1 + (\delta x / \delta q_2)\, \delta q_2 + \ldots$$

$$\delta y = (\delta y / \delta q_1)\, \delta q_1 + (\delta y / \delta q_2)\, \delta q_2 + \ldots$$

مثال \ جد معادلة الحركة لجسيم في ا مستو

الحل

لنختار المحاور القطبية

$q_1 = r \qquad q_2 = \theta$

عندئذ $x = x(r , \theta) = r \cos\theta$

و $y = y(r , \theta) = r \sin\theta$

$$\delta x = (\delta x / \delta r)\, \delta r + (\delta x / \delta \theta)\, \delta \theta = \cos\theta\, \delta r - r \sin\theta\, \delta\theta$$

$\delta y = (\delta y/ \delta r)\, \delta r + (\delta y/ \delta\theta)\, \delta\theta = \sin\theta\ \delta r + r\cos\theta\ \delta\theta$

١٠- ١) القوى المعممة Generalized Forces

اذا عانى جسيم ازاحة $\delta\vec{r}$ تحت تاثير قوة $\vec{F}$علم ان الشغل δw

المنجز من القوة عندئذ يكون

$$\delta w = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = Fx\,\delta x + Fy\,\delta y \times Fz\,\delta z$$

وبدلالة رموزنا التي تبنيناها توا يكون الشغل

$$\delta w = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = Fx\,\delta x + Fy\,\delta y \times Fz\,\delta z$$

$\delta w = \sum_1 = F_1\,\delta\, x_1$

$\delta w = \sum_k\ Q_k\ \delta q_k$

$\delta Q_k = \sum_1\ F_1\ (\delta x_1\ /\ q_k)$

الكمية Q_k المعرفة بالمعادلة المذكورة اعلاد تسـمى بالقوة المعممة المرافقة للاحداثي q_k ولما كان لحاصل الضرب δq_k Q_k وحدات الشغل عدئذ تكون وحدات Q_k بوحدات قوة اذاكانت q_k تمثل مسافة ووحدات عزم اذا كانت q_k تمثل زاوية .

θ=42, r=41 فحندئذ تصبح

يمكن ايجاد كل قوة معممة Q_k مباشرة من حقيقة كون δq_k Q_k يمثل الشغل المنجزعلى المنظومة من القوى الخارجية عندما يتغيير الاحداثي q_k بمقدار δq_k (تبقى بقية الاحداثيات المعممة ثابتة) • فمثلا، اذا كانت المنظومة جسما صلدا، فالشغل المنجز من القوى الخارجية عندما يدور الجسم خلال زاوية δ_θ حول محور معلوم هو δ_θ L_θ حيث L_θ هو مقدار العزم الكلي لجميع القوى حول المحور. وفى هذه الحالة تكون L_θ هي القوى المعممة المرافقة للاحداثي θ.

(١٠- ٢) القوى المعممة للمنظومات المحافظة

ان المركبات المتعامدة للقوة المؤثرة على جسيم في مجال قوة محافظ تعطي كالاتي

$$F_1 = - \delta V / \delta x_1$$

حيث V هى دالة طاقة الجهد• ووفقا لذلك تصبح علاقتنا للقوة

المعممة كما يلي

$$Q_k = - (\sum_1 (\delta V / \delta x_1) (\delta x / q_k)$$

والتعبير بين القوسين هو المشتقة الجزئية للدالة v بالنسبة للاحداثي q_k اذن

$$Q_k = - (\delta V / \delta q_k)$$

فمثلا اذا استخدمنا المحاور القطبية

$q_1 = r$ $q_2 = \theta$ فعندها تصبح القوى المعممة - $Q_r \delta V / \delta r$

اذا كانت V هي دالة لـ r فقط (قوة مركزية) فعندئذ

$Q_\theta = - \delta V / \delta\theta$ اذا كانت v فقط (قوة مركزية) فعندئذ v هي دالة الـ

$Q_\theta = 0$

(١٠- ٣) معادلات لاكرانج   Lagranges Equations

لكي نجد المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الاحداثيات المعممة نبتدئ بالمعادلة

$F_i = m_i \ddot{x}_i$

الطاقة الحركية T لمنظومة تتكون من N من الجسيمات و كما يلي

$T = \sum_{i=1}^{N} 1/2\ mi\ (\dot{x}i^2 + \dot{y}i^2 + \hat{z}i^2\ )$

سوف تكتب ببساطة

$T = \sum_{i=1}^{3N} 1/2\ mi\ \dot{x}i^2$

حيث الاحداثيات الديكارتية x_i هى دوال للاحداثيات المعممة q_k .

$x_i = x_i\ \ (\ q_1\ ,\ q_1\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ q_n\ ,\ t\ )$

$\dot{x}_i = \sum_k\ (\delta x_1\ /\ q_k)\ q_k + (\delta x_1\ /\ \delta t)$

ان مدى i هو 3N , ...,2,1 حيث تمثل N عدد الجسيمات

في المنظومة، ومدى k هو n ....,3,2,1 حيث n هو عدد الاحداثيات المعممة (درجات الحرية) للمنظومة ٠

بمكاننا اعتبار T كدالة للإحداثيات المعممة، مشـــتقاتها بالنســبة للزمن، وقد تكون دالة للزمن وواضـــح من علاقة

ان $\dot{X}_i$

$\delta\dot{x}_1 / \delta q_k\ \ =\ \ \delta x_1 / \delta q_k$

لنضرب الان $\dot{x}_1$ ونفاضل بالنسبة للزمن t. عندئذ نحصل على:

$d/dt\ \ (\dot{x}_1\ (\dot{x}_1/\partial\dot{q}) = d/dt\ (\dot{x}_1\ (\partial\dot{x}_i / \delta q_k) =\ \ \dot{x}_1\ (\partial x_i / \delta q_k) + \dot{x}_1\ (\partial\dot{x}_i / \delta q_k)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) = \ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)$$

تنتج الخطوة الأخيرة فمن امكانية عكس ترتيب التفاضل بالنسبة للزمن t و q_k او $\dot{q}_k$ ثم اذا ضربنا بــــ m_1
ووضعنا F_1 =ẍ m1 يمكننا كتابة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m_i\dot{x}_i^2}{2}\right) = F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i\dot{x}_i^2}{2}\right)$$

اذن باخذ المجموع على 1 نجد ان

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i\left(F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

واخيرا من تعريف القوة المعممة Q_k نحصل على النتيجة التالية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

هذه هي معادلات الحركة التفاضلية فى الاحداثيات المعممة. وتسمى بمعادلات لاكرانج للحركة.

فى الحالة التى تكون فيها الحركة محافظة بحيث Q ‘s تعطي

من المعادلة، فعندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

المعادلات اكثر عند تعريف دالة مثل L تسمى بدالة لاكرانج بحيث

L = T

ومفهوم ان T , V هي دوال للإحداثيات المعممة ٠ اذن ، لما كانت $\delta V / \delta q = 0$, $V = V(a)$ نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{and} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

اذن يمكن استنباط المعادلات التفاضلية للحركة لمنظومة محافظة بسهولة اذا عرفنا دالة لاكرانج بدلالة محاور مناسبة .

للحركة على الشكل التالي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_k' + \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

ان الصيغة المذكورة اعلاه مناسبة للاستخدام, عند استخدام قوى احتكاكية .