

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

المعادلات التفاضلية التي تؤول الى معادلات متجانسة

تكون هذه المعادلات بالشكل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \dots \dots \dots (1)$$

حيث $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ثوابت.

ولغرض حل المعادلة التفاضلية أعلاه هناك حالتين تعتمدان على المستقيمين المذكورين في المعادلتين الآتيتين:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

الحالة الأولى:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

فيكون المستقيمان متقاطعان عندئذ نفرض أن نقطة التقاطع هي (h, k) ونستخدم التعويض

$$x = x_1 + h \Rightarrow dx = dx_1$$

$$y = y_1 + k \Rightarrow dy = dy_1$$

ثم نعوض العلاقتين أعلاه في المعادلة الاصلية (1) فتتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة متجانسة ونستخدم الطريقة التي درسناها في المحاضرة السابقة.

الحالة الثانية:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

فيكون المستقيمان متوازيان عندئذ نستخدم احدي العلاقتين التاليتين في الحل وهما

$$z = a_1x + b_1y \Rightarrow dz = a_1dx + b_1dy$$

$$z = a_2x + b_2y \Rightarrow dz = a_2dx + b_2dy$$

وبعد التعويض في المعادلة الاصلية نحصل على معادلة قابلة لفصل المتغيرات لذا سيكون من السهولة الحصول على الحل العام لها.

ملاحظة: قد يكون المستقيمان منطبقين أي أن $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \varphi$ فالحل يكون بالشكل

$$y' = f(\varphi) \xrightarrow{\text{الطرفين بالوسطين}} dy = f(\varphi) dx \xrightarrow{\text{نكامل}} y = F(\varphi)x + c$$

ملاحظة: قد تأتي المعادلة (1) بالصيغة

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \dots \dots \dots (4)$$

وتستخدم نفس الحالات أعلاه لإيجاد الحل.

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y + x + 5}$$

$$2) \frac{dy}{dx} = \frac{3y + 2x + 5}{4x + 6y + 5}$$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x - 4}{y - 3x + 3}$$

$$2) (7y - 3x + 3) \frac{dy}{dx} + (3y - 7x + 7) = 0$$

$$3) (2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 1)dy = 0$$

$$4) (x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$$