المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

ثانياً: المعادلات التفاضلية المتجانسة Homogeneous Differential Equations

تعريف: الدالة المتجانسة Homogeneous Function

نقول عن الدالة $f(x,y)$ التابعة للمتغيرين x و y بأنها متجانسة من الدرجة n إذا تحققت العلاقة

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

حيث: $t \neq 0$ عدد حقيقي

إذا كانت: $n = 0$ نقول ان درجة التجانس من الدرجة صفر أو متجانسة بشكل عام.

أي يمكن اخراج t عامل مشترك بعد تبديل كل من (x,y) بـ (tx,ty) وتعود الدالة كما هي.

وكمثال على ذلك فالدالة $f(x,y) = x^3 + y^3$ متجانسة من الدرجة الثالثة لأن

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f(x,y)$$

بينما الدالة $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$ غير متجانسة وذلك لأنها تحتوى على حد مطلق.

تمرين

هل الدوال التالية متجانسة أم لا؟

1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}$

2) $f(x,y) = xy^2 + y$

تعريف: المعادلة المتجانسة

يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والتي على الصورة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

بأنها متجانسة إذا كانت كلاً من M, N دالة متجانسة ومن نفس الدرجة.

خطوات حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

١- نضع $y = vx$.

٢- نشتق (١) بالنسبة لـ x فنحصل على $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.

٣- نضرب المعادلة $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ بالمقدار dx فنحصل على $dy = vdx + xdv$.

٤- نعوض قيمتي y, dy في المعادلة المعطاة فتصبح المعادلة قابلة لفصل المتغيرات والتي من السهل استنتاج الحل لها.

٥- عند إيجاد الحل النهائي يجب أن يكون في المتغيرين x, y فقط أي يجب أن نعوض عن v بما يساويها.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

الحل:

بوضع $y = vx$ وباشتقاقها بالنسبة الى x نحصل على

$$dy = vdx + xdv$$

وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الأصلية نجد أن

$$(x^2 + v^2x^2)dx - 2vx^2(vdx + xdv) = 0$$

$$\Longrightarrow x^2dx + v^2x^2dx - 2v^2x^2dx - 2vx^3dv = 0$$

وبجمع الحدود المتشابهة والبحث عن العوامل المشتركة ينتج

$$\Longrightarrow x^2(1 - v^2)dx - 2vx^3dv = 0$$

بالقسمة على المقدار $(1 - v^2)x^3$ نحصل على

$$\frac{dx}{x} - \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0 \Longrightarrow \ln x + \ln(1 - v^2) = \ln c$$

$$\Longrightarrow \ln x(1 - v^2) = \ln c \Longrightarrow x(1 - v^2) = c$$

وبإرجاع قيمة v لما يساويها وتعويضها أعلاه نجد أن

$$x - \frac{xy^2}{x^2} = c \Longrightarrow x^2 - y^2 = cx$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة.

ملاحظة: يستحسن دوماً ترتيب الحل العام (نعزل y) حتى نكتبه بالشكل $y = F(x) + c$ ، وذلك إن أمكن.

ملاحظة: في بعض الأسئلة يمكن أن نستخدم الفرضية $x = vy$ إذا ظهرت لنا المشتقة بالشكل $\frac{dx}{dy}$.

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

2) $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}dx = 0$

3) $\left(2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\frac{y}{x}dy = 0$

4) $(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$

5) $\left(1 + 2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

واجب بيتي HOMEWORK

حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

2) $(xy^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$

3) $\dfrac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \dfrac{dy}{y^2 - 4xy}$

4) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

5) $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

6) $y\sqrt{x^2+y^2}dx - x\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$

7) $y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y-x}{x}\right)$

8) $\left(x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

9) $y^2(x^2+2)dx + (x^3+y^3)(ydx - xdy) = 0$