مسائل القيم الابتدائية والحدودية

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية الاعتيادية تعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية، وهذه الشروط هي التي تمكننا من إيجاد قيم الثوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام.

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الثانية مثلاً يحتوي على ثابتين اختياريين، لذا يلزم وجود شرطين إضافيين للمعادلة لإيجاد قيمة كل من الثابتين وهذان الشرطان يأخذان صوراً مختلفة ومنها:

١- إذا أعطي هذان الشرطان عند نفس النقطة x_0 مثل

$$y(x_0) = a \quad , y'(x_0) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند x_0 وتسمى المعادلة التفاضلية مع هذه الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem**.

٢- إذا أعطي الشرطان عند نقطتين مختلفتين مثل

$$y(x_1) = y_1 \quad , y(x_2) = y_2$$

كانت الشروط شروطاً حدودية وسميت المعادلة التفاضلية مع هذه الشروط مسألة القيمة الحدودية **Boundary Value Problems**.

مثال: أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' = x \qquad , y(0) = 1 \qquad , y'(0) = -1$$

الحل:

بتكامل المعادلة مرتين نجد أن

$$y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2 \qquad (*)$$

والذي يمثل الحل العام للمعادلة أعلاه.

باشتقاق الحل العام مرة واحدة

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

الان بتعويض الشروط الابتدائية

إعداد م.م. مؤيد محمود خليل

$y'(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1$

$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

وبتعويض قيم c_1, c_2 في $(*)$ يكون الحل بالصيغة $y = \frac{1}{6}x^3 - x + 1$.

مثال: أوجد حل مسألة القيمة الحدودية

$$y'' = 6x + 2 \qquad , y(0) = 2 \qquad , y(2) = 8$$

الحل:

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة الى x مرتين نحصل على

$y = x^3 + x^2 + ax + b$

الان بتعويض الشروط الحدودية نحصل على

$y(0) = 2 \Rightarrow b = 2$

$y(2) = 8 \Rightarrow a = -3$

والحل هو

$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$

مبرهنة الوجود والوحدانية لحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية (للاطلاع فقط)

نفرض المعادلة التفاضلية

$y' = f(x,y) \dots\dots\dots (1)$

ونفرض الشرط الابتدائي

$y(x_0) = y_0 \dots\dots\dots (2)$

وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في المنطقة المغلقة R بالشكل

$$R: |x - x_0| \le a \qquad , |y - y_0| \le b$$

حيث a, b ثابتان، تحقق:

١- الدالة $f(x,y)$ مستمرة ومقيدة أي إذا وجد عدد موجب M فإن
$|f(x,y| \le M$

٢- الدالة $f(x,y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة الى y ومقيدة أي أن $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K$ حيث K عدد موجب.

إعداد م.م.مؤيد محمود خليل

فإن المعادلة (1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائي (2) في المنطقة $|x - x_0| \le h$ حيث $h = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

ملاحظة: الشرط $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K$ يسمى **شرط ليبشتز Lipschitz Condition** والثابت K يسمى **ثابت ليبشتز Lipschitz Constant**.

تمارين (تحل في المحاضرة)

جد الحل لمسائل القيم الابتدائية التالية:

1) $y' - 5y = 0, \quad y(0) = 2$

2) $y' = \sin x, \quad y(0) = 5$

3) $y' = \cos x + \sin x \quad , y(\pi) = 1$

4) $y'' = 2 - 6x \quad , y'(0) = 4 \quad , y(0) = 1$

واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل لمسائل القيم الابتدائية التالية:

1) $y' = 3x^{-2} \quad , y(1) = 2$

2) $y' = 6 - 2\frac{y}{x} \quad , y(3) = 1$

3) $y' = \frac{y \ln y}{x} \quad , y(2) = e$

4) $y' = \frac{50x^2 - 10y}{3} \quad , y(0) = 0$

إعداد م.م. مؤيد محمود خليل

الارتباط والاستقلال خطياً LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE

لمعرفة ما إذا كانت حلول المعادلة التفاضلية مرتبطة أو مستقلة خطياً يجب إيجاد محدد فرونسكي والذي يعرف بالشكل الاتي:

محدد فرونسكي

لتكن لدينا الدالتين $y_1(x), y_2(x)$ قابلتين للاشتقاق بالنسبة الى x فاننا نعرف محدد فرونسكي بالشكل

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

فإذا كان محدد فرونسكي مساوياً للصفر قلنا بأن الحلول مرتبطة خطياً اما إذا كان غير مساوي للصفر فأن الحلول تكون مستقلة خطياً. وإذا كان لدينا ثلاث دوال فأن محدد فرونسكي يكون بالشكل

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

ويتم إيجاد المحدد اعلاه كما درسنا في الجبر الخطي.

مثال: هل أن الحلول $y_1 = x^2, y_2 = \sin 6x$ مرتبطة أم مستقلة خطياً؟

الحل:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W(x^2, \sin 6x) = \begin{vmatrix} x^2 & \sin 6x \\ 2x & 6\cos 6x \end{vmatrix} = 6x^2 \cos 6x - 2x \sin 6x \neq 0$$

إذن الحلول مستقلة خطياً.

إعداد أ.م.مؤيد محمود خليل

تمارين (تحل في المحاضرة)

بين فيما إذا كانت الدوال الاتية مستقلة أم مرتبطة خطياً

1) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$

2) $y_1 = x^2, y_2 = x^3$

3) $y_1 = 3e^{2x}, y_2 = 5e^{2x}$

4) $y_1 = \cos x\,, y_2 = \sin x\,, y_3 = x$

5) $y_1 = \ln x\,, y_2 = -\ln x^2\,, y_3 = \ln x^3$

واجب بيتي HOMEWORK

بين فيما إذا كانت الدوال الاتية مستقلة أم مرتبطة خطياً

1) $y_1 = \sin x\,, y_2 = \cos x\,, y_3 = e^x$

2) $y_1 = e^x, y_2 = e^x, y_3 = e^{-2x}$

3) $y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x}$

4) $y_1 = \cos(\ln x^2)\,, y_2 = \sin(\ln x^2)$

إعداد أ.م. مويد محمود خليل