حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية باستخدام تحويل لابلاس

يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية وذلك باستخدام تحويلات لابلاس ومعكوسه

وذلك عن طريق الخطوات التالية:

١) نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية.

٢) تعويض تحويل لابلاس للدوال والمشتقات الموجودة في المعادلة بما يساويه.

ملاحظة: تحويل لابلاس للدوال يؤخذ من الجدول (١) في المحاضرة (١٧) اما تحويل لابلاس للمشتقات

فيعرف كما يلي:

$$L\{y'\} = py(p) - y(0)$$

$$L\{y''\} = p^2 y(p) - py(0) - y'(0)$$

$$L\{y'''\} = p^3 y(p) - p^2 y(0) - py'(0) - y''(0)$$

$$L\{y^n\} = p^n y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) \dots y^{(n-1)}(0)$$

٣) تعويض الشروط الابتدائية المعطاة في المعادلة.

٤) جعل $y(p)$ في الطرف الأيسر والحدود التي تحتوي على p في الطرف الأيمن.

٥) أخذ معكوس تحويل لابلاس للطرفين فنحصل على حل المعادلة.

مثال

لإيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x, \quad y(0) = 1 \dots \dots \dots (1)$$

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (١)

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + 2L\{y(x)\} = L\{\cos x\}$$

$$p\bar{y}(p) - y(0) + 2\bar{y}(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

وبتعويض الشروط الابتدائية

$$(p+2)\,\bar{y}(p) = \frac{p}{p^2+1} + 1$$

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p+2)} + \frac{1}{p+2}$$

وباستخدام التجزئة للكسور

$$\bar{y}(p) = \frac{2}{5}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{p+2}\right)$$

وباستخدام معكوس لابلاس نحصل على الحل العام

$$y(x) = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}e^{-2x}$$

مثال

لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + y = x \quad , y(0) = 1\,,\ y'(0) = 2$$

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة

$$L\{y''\} + L\{y(x)\} = L\{x\}$$

$$p^2\bar{y}(p) - p\,y(0) - y'(0) + \bar{y}(p) = \frac{1}{p^2}$$

وبتعويض الشروط الابتدائية

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{2}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1}$$

وباستخدام معكوس لابلاس نجد أن حل المعادلة التفاضلية هو

$$y(x) = x + \sin x + \cos x$$

مثال

لمعرفة الحل العام لمسألة القيمة الابتدائية

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}, y(0) = -3, y'(0) = 5$$

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة

$$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

$$p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) - 3p\bar{y}(p) + 3y(0) + 2\bar{y}(p) = \frac{4}{p-2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية نجد ان

$$p^2\bar{y}(p) + 3p - 5 - 3p\bar{y}(p) - 9 + 2\bar{y}(p) = \frac{4}{p-2}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{4}{(p-2)(p^2-3p+2)} + \frac{14-3p}{(p^2-3p+2)}$$

$$y'(p) = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$$

وبالتحليل الى الكسور الجزئية نحصل على

$$y'(p) = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$$

وبأخذ معكوس لابلاس

$$y(x) = -7e^{x} + 4\,e^{2x} + 4x\,e^{2x}$$

واجب بيتي HW

جد حل مسائل القيم الابتدائية التالية باستخدام تحويل لابلاس ومعكوسه

1) $y'' - 4y' = 0, y(0) = 3, y'(0) = 8$

2) $y'' + 2y' + y = 6, y(0) = 5, y'(0) = 10$

3) $y''' + 4y' = -10e^{x}, y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -10$

4) $y'' + 11y' + 24y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 0$

5) $y'' - 13y' + 40y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -2$

6) $y''' - y' = e^{x} + e^{-x}, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

7) $y'' + 4y = \cos 2x \,, y(0) = y'(0) = 0$

8) $y^{(4)} + y'' = 0, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1$