تحويل لابلاس Laplace Transform

يعرف تحويل لابلاس لدالة $f(x)$ حيث $x > 0$ والذي يرمز له بالرمز $\bar{f}(p)$ بالشكل

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx \dots\dots(1)$$

بشرط ان يكون هذا التكامل متقارب و p عدد حقيقي وكذلك يرمز لتحويل لابلاس بالرمز

$$\bar{f}(p) = L\{f(x)\}$$

وبذلك تكتب المعادلة (1) بالصورة:

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx \dots\dots(2)$$

خواص تحويل لابلاس

ان تحويل لابلاس هو تحويل خطي أي انه إذا كان A , B ثابتين وان كل من $f(x)$, $g(x)$ دالة للمتغير x و $L\{\ \}$ هو تحويل لابلاس فان

$$1 - L\{Af(x)\} = AL\{f(x)\}$$
$$2 - L\{Af(x) + Bg(x)\} = AL\{f(x)\} + BL\{g(x)\}$$

برهان الخاصية الاولى

$$L\{Af(x)\} = \int_0^\infty Ae^{-px} f(x)dx = A\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx = AL\{f(x)\}$$

برهان الخاصية الثانية

$$L\{Af(x) + Bg(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}\left(Af(x) + Bg(x)\right)dx$$
$$= \int_0^\infty Ae^{-px} f(x)dx + \int_0^\infty Be^{-px} g(x)dx$$
$$= AL\{f(x)\} + BL\{g(x)\}$$

إعداد م.مؤيد محمود خليل

تحويل لابلاس لبعض الدوال المهمة

الجدول ادناه يحتوي على تحويلات لابلاس لبعض الدوال مثل الدوال الثابتة والاسية والمثلثية ومتعددات الحدود.

جدول (١) تحويل لابلاس لبعض الدوال الأساسية (مهم جداً جداً يحفظ عن ظهر قلب)

$f(x)$	$\mathcal{L}\{f(x)\}$
1	$\frac{1}{p}$, $p>0$
x	$\frac{1}{p^2}$, $p>0$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$, $p>0$ $n=1,2,3,\dots$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$, $p>0$
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$, $p>0$
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$, $p>0$
$\sinh ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$, $p>\lvert a\rvert$
$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$, $p>\lvert a\rvert$
$e^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$, $p>a$
$e^{ax}\cos bx$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$, $p>a$
$e^{ax}x^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $p>a$

تمارين تحل في المحاضرة

١) جد تحويل لابلاس للدوال التالية باستخدام التعريف:

$1)\ e^{6x} \quad 2)\ \cos 2x$

٢) جد تحويل لابلاس للدوال التالية باستخدام الخاصية الخطية والجدول (١):

$1)\ 6e^{-3x}-x^2+2x-8$

2) $5 - e^{2x} + 6x^2$

3) $x^3 - xe^x + e^{4x}\cos x$

4) $x^2 - 3x - 2e^{-x}\sin 3x$

5) $e^{3x}\sin 6x - x^3 + e^x$

واجب بيتي HW

١) جد تحويل لابلاس للدوال التالية باستخدام التعريف:

1) $21x$ 2) $7e^{-x}$ 3) $-8\cos 3x$ 4) $2\sin 2x$

٢) جد تحويل لابلاس للدوال التالية باستخدام الخاصية الخطية والجدول (١):

1) $28e^x - x^3 + 2x - 4$

2) $7 - e^{3x} + 4x^2$

3) $x^3 - xe^{3x} + e^{2x}\cos 3x$

4) $x^4 - 5xe^x - 6e^{-2x}\sin 2x$

5) $e^{6x}\sin 3x - x^2 + e^{4x}$

6) $x\cosh 4x$

7) $e^x\cosh x$

8) $e^{-x}\sinh 2x$

9) $e^{-2x}\cos^2 3x - 3x^2e^{3x}$

10) $5\sin 2x + 10e^{-3x}$

11) $\sinh 2x - x$

12) $\cos 4x + (x-1)^2$

13) $2x^2e^{-3x} - 4x + 1$

14) $xe^{3x} + 4x^4$

15) $\sin^3 x$

16) $2\cosh^2 3x$

اعداد أ.م.مؤيد محمود خليل