الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة $f(x)$

٥) إذا كانت $f(x)=x^m v(x)$ وكانت $v(x)$ تساوي

$1)\ v(x)=\sin mx \quad 2)\ v(x)=\cos mx$

فأن الحل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{F(D)}.f(x)$$

$$=e^{imx}.\frac{1}{f(D+mi)}.x^m$$

حيث أن

$$e^{imx}=\cos mx+i\sin mx \ldots\ldots\ldots(*)$$

ملاحظة: إذا كانت $v(x)=\cos mx$ فسوف نأخذ الجزء الحقيقي من المعادلة $(*)$ وإذا كانت $v(x)=\sin mx$ فسوف نأخذ الجزء التخيلي من المعادلة $(*)$.

خطوات الحل

١) نضع $y_p=\frac{1}{F(D)}f(x)$.
٢) نعوض عن الدالة المثلثية بصيغة اويلر $e^{imx}=\cos mx+i\sin mx$
٣) نقوم بسحب الدالة الأسية المركبة الى اليسار ونعوض عن كل D بـ $(D+mi)$ أي أن $F(D)$ تصبح $F(D+mi)$.
٤) بعد الخطوة (٣) ننسى الدالة الأسية المركبة نهائياً ونركز على الدالة $v(x)$ فقط.
٥) نجد الحل الخاص وفقاً للحالة التي درسناها سابقاً (حالة متعددة الحدود).

تمارين (**تحل في المحاضرة**)

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة المؤثر

$1)\ y''+4y=x\sin x$

$2)\ y''+4y=x\cos x$

$3)\ y''-2y'+y=xe^x\sin x$

واجب بيتي HW

$1)\ y''-4y=x\cos 2x$

$2)\ y''+2y=x\sin x$

$3)\ y''+3y'+2y=xe^x\sin x$

معادلة أويلر التفاضلية الاعتيادية

صيغتها العامة هي

$$(x^nD^n + a_1x^{n-1}D^{n-1} + a_2x^{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_n)y = f(x)$$

لغرض حل معادلة أويلر التفاضلية الاعتيادية نستخدم الفرضيات الاتية

$$x = e^t \Longrightarrow t = \ln x \dots\dots\dots (*)$$

$$xDy = D_1y$$

$$x^2D^2y = D_1(D_1 - 1)y$$

$$x^3D^3y = D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2)y$$

$$\vdots$$

$$x^nD^ny = D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2)\dots\big(D_1 - (n-1)\big)y \dots\dots\dots\dots (**)$$

خطوات الحل

١) نستخدم الفرضية $(*)$ لغرض تحويل الدالة $f(x)$ بدلالة t.

٢) نستخدم الفرضية $(**)$ لتحويل معادلة أويلر من معادلة ذات معاملات متغيرة الى معادلة ذات معاملات ثابتة يمكن حلها حسب طريقة المؤثر.

٣) نجد أولا الحل العام (الدالة المتممة y_c) عندما تساوي المعادلة صفر.

٤) نجد الحل الخاص y_p عن طريق الحالات التي درسناها في طريقة المؤثر.

٥) بعد إيجاد الحلين العام والخاص نستخدم الفرضية $(*)$ ليكون الحل بدلالة x فقط.

تمارين (تحل في المحاضرة)

جد الحل الخاص لمعادلات أويلر التفاضلية التالية باستخدام طريقة المؤثر

1) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^2$

2) $x^2y'' + xy + y = \ln x$

3) $2x^2y'' + 15xy' - 7y = \sqrt{x}$

واجب بيتي HW

1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = (\ln x)^2 - \ln x^2$

2) $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 32x^2$

3) $x^2\, y'' - xy' + 4y = \cos(\ln x)$