الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (طريقة المؤثر D)

المؤثر D

يعرف المؤثر D بانه المشتقة الأولى بالنسبة الى المتغير x والتي تكون بالشكل $\frac{d}{dx}$ أي ان

$$D=\frac{d}{dx} \quad ,D^2=\frac{d^2}{dx^2} \quad ,D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

وتكون المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n بالصورة

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x) \ldots\ldots\ldots (*)$$

مثال: لو أعدنا كتابة المعادلة $y'''-y''-4y'+4y=0$ بدلالة المؤثر فإنها ستكون بالشكل

$$(D^3-D^2-4D+4)y=0$$

خواص المؤثر

1) $D^mf(x)+D^nf(x)=D^nf(x)+D^mf(x)$

2) $D^mD^nf(x)=D^nD^mf(x)=D^{n+m}f(x)$

3) $D^n(f(x)\pm g(x))=D^nf(x)\pm D^ng(x)$

4) $D^n\big(cf(x)\big)=cD^nf(x)$

تمارين: احسب كلاً مما يلي:

1) $D^2(x^2)$
2) $D^2(e^{2x}+e^{4x})$
3) $D^3(5\sin x)$
4) $(D^2+D+1)e^{2x}$
5) $(D-3)(\cos 4x+\sin 4x)$
6) $\dfrac{1}{1+\frac{2}{D}-\frac{1}{D^2}}$

الحل الخاص

يمكن كتابة المعادلة (*) بالصيغة $F(D)y = f(x)$ ويكون الحل الخاص بالشكل

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.f(x)$$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة $f(x)$

١) إذا كانت $f(x) = e^{bx}$ فالحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{F(b)}.e^{bx} \quad ,F(b) \neq 0$$

اما إذا كانت $F(b) = 0$ فالحل الخاص يكون بالشكل

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{g(D).(D-b)^r}.e^{bx} = \frac{x^r e^{bx}}{g(b).r!}$$

حيث $g(b) \neq 0$ و $(D-b)^r = 0$.

تمارين (تحل في المحاضرة)

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة المؤثر

$1)\ (D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$

$2)\ (D^2 + 4D + 8)y = (1 + e^x)^2$

$3)\ (3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$

$4)\ (D^2 + 6D + 9)y = 24e^{-3x}$

واجب بيتي HW

$1)\ y'' - 2y' + y = e^x$

$2)\ (D^2 - 1)y = e^{-x}$

$3)\ y'' - 2y' - 3y = 6e^{5x}$

4) $y'' - y = a^x$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة $f(x)$

٢) إذا كانت $f(x) = \sin bx$ أو $f(x) = \cos bx$ فان الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{F(D^2)} \sin bx \quad or \quad \cos bx$$

$$y_p = \frac{1}{F(-b^2)} \sin bx \quad or \quad \cos bx \qquad , F(-b^2) \neq 0$$

أي أننا نعوض بدلا من كل D^2 بـــ $-b^2$ وكذلك $D^3 = D^2.D = -b^2 D$

ملاحظة: بعد التعويض بدلا من كل D^2 بـــ $-b^2$ في المقام يجب ان يكون الناتج عدداً صحيحاً بدون ان يحتوي على المؤثر D اما إذا بقي المؤثر D بعد التعويض فأننا يجب أن نضرب بمرافق المقام حتى نحصل على D^2 مرة أخرى ثم نرجع ونعوض بدلا من كل D^2 بـــ $-b^2$ الى ان تضمحل الحدود التي تحوي على المؤثر D.

أما إذا كانت $F(-b^2) = 0$ فأننا نستخدم صيغة أويلر

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$$

أي أن

$$\cos bx = Re.(e^{ibx}) \qquad , \quad \sin bx = Im.(e^{ibx})$$

فنجد الحل الخاص للدالة e^{ibx} كما في النقطة (1) وسيتضح هذا أكثر من خلال حل الأمثلة.

ملاحظة هامة جداً: إذا كان المؤثر في البسط نشتق وإذا كان في المقام نكامل وحسب درجة المؤثر.

طريقة ثانية (غير صيغة أويلر)

إذا كانت

$$F(D^2) = F(-b^2) = 0$$

فالحل الخاص يكون بالشكل

$$y_p = \frac{1}{D^2+b^2}\sin bx = \frac{x}{2}\int \sin bx\,dx$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+b^2}\cos bx = \frac{x}{2}\int \cos bx\,dx$$

وذلك حسب الدالة التي تأتي في السؤال أي إذا كانت الدالة في الطرف الأيمن $\sin bx$ نستخدم القانون الأول وإذا كانت الدالة في الطرف الأيمن $\cos bx$ نستخدم القانون الثاني.

تمارين (تحل في المحاضرة)

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة المؤثر

1) $y'' - 3y' + 2y = \sin 5x$

2) $(D^2 - 5D + 6)y = \sin 3x$

3) $(D^3 + D^2 - D - 1)y = \cos 2x$

4) $(D^2 + 4)y = 3\cos^2 x$

واجب بيتي HW

1) $(D^2 - 4D + 4)y = \sin 2x$

2) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x + \cos x$

3) $(D^3 + 1)y = \cos 2x$