الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة طريقة تغيير الثوابت

قبل أن نبدأ بشرح طريقة تغيير الثوابت يجب التعرف على مفهوم الارتباط والاستقلال الخطي عن طريق إيجاد محدد فرونسكي

الارتباط والاستقلال الخطي LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE

لمعرفة ما إذا كانت حلول المعادلة التفاضلية مرتبطة أو مستقلة خطياً يجب إيجاد محدد فرونسكي والذي يعرف بالشكل الاتي:

محدد فرونسكي

لتكن لدينا الدالتين $y_1(x), y_2(x)$ قابلتين للاشتقاق بالنسبة الى x فاننا نعرف محدد فرونسكي بالشكل

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

فاذا كان محدد فرونسكي مساوياً للصفر قلنا بأن الحلول مرتبطة خطياً اما إذا كان غير مساوي للصفر فأن الحلول تكون مستقلة خطياً. وإذا كان لدينا ثلاث دوال فأن محدد فرونسكي يكون بالشكل

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

ويتم إيجاد المحدد أعلاه كما درسنا في الجبر الخطي.

مثال: هل أن الحلول $y_1 = x^2, y_2 = \sin 6x$ مرتبطة أم مستقلة خطياً؟

الحل:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W(x^2, \sin 6x) = \begin{vmatrix} x^2 & \sin 6x \\ 2x & 6\cos 6x \end{vmatrix} = 6x^2 \cos 6x - 2x \sin 6x \neq 0$$

اذن الحلول مستقلة خطياً.

تمارين (تحل في المحاضرة)

بين فيما إذا كانت الدوال الاتية مستقلة أم مرتبطة خطياً

1) $y_1 = e^x \sin x\,, y_2 = e^x \cos x$

2) $y_1 = e^x, y_2 = e^x, y_3 = e^{-2x}$

3) $y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x}$

4) $y_1 = \ln x\,, y_2 = -\ln x^2\,, y_3 = \ln x^3$

5) $y_1 = \cos(\ln x^2)\,, y_2 = \sin(\ln x^2)$

6) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = e^{-2x}$

واجب بيتي HOMEWORK

بين فيما إذا كانت الدوال الاتية مستقلة أم مرتبطة خطياً

1) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$

2) $y_1 = x^2, y_2 = x^2 \ln x$

3) $y_1 = 3e^{2x}, y_2 = 5e^{2x}$

4) $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{-2x}$

5) $y_1 = 1 + x, y_2 = 1 + 2x, y_3 = x^2$

6) $y_1 = \sin x\,, y_2 = \cos x\,, y_3 = \sin 2x$

شرح طريقة تغيير الثوابت

لحل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة بطريقة تغيير الثوابت نفرض أن

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثانية وأن $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ هو الحل العام (الدالة المتممة) للجزء المتجانس لهذه المعادلة. فأن الحل الخاص للجزء غير المتجانس للمعادلة التفاضلية يعطى بالعلاقة التالية

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

حيث

$$v_1 = -\int \frac{f(x)y_2}{W(y_1, y_2)}dx$$

$$v_2 = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)}dx$$

وأن y_1, y_2 هما الحلان اللذان نجدهما من خلال الدالة المتممة و $W(y_1, y_2)$ هو محدد فرونسكي لهذين الحلين ويتم إيجاده باستخدام القانون $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$.

تنويه: كل طالب لا يتقن طرق التكامل جيداً سيلقى صعوبات كبيرة في هذه الطريقة لأنها تعتمد بشكل كلي على مهارات الطالب في إيجاد التكامل وقد أعذر من أنذر.

تمارين (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام $y_c + y_p$ للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة تغيير الثوابت

1) $4y'' - 4y' - 8y = 8e^{-x}$

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2} + 3e^x$

3) $y'' + 5y' + 6y = xe^x$

4) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$

5) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$

واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل العام $y_c + y_p$ للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة تغيير الثوابت

1) $y'' + y' = -\ln|x|$

2) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

3) $y'' = x^2$

4) $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$

5) $y'' - 2y' + y = \dfrac{2e^x}{x}$

6) $y'' + 4y = \tan 2x$

7) $y'' + 4y = \tan 2x + e^{3x}$

8) $y'' + 2y' + y = e^x \ln x$

9) $y'' + 2y' + 5y = e^x \sec x$

10) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + e^x$