المعادلات التفاضلية الخطية (المتجانسة وغير المتجانسة) من الرتب العليا

تكون المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n بالصورة

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)\ \ldots\ldots(1)$$

أو بالصورة

$$a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)\ \ldots\ldots(2)$$

حيث a_0, a_1, a_{n-1}, a_n ثوابت و $a_0\neq 0$ وإذا كانت $f(x)=0$ فأن المعادلة التفاضلية تسمى حينها بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة.

وكمثال على ذلك فالمعادلة $y'''-6y''+12y'-8y=0$ معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثالثة لان الطرف الأيمن فيها يساوي صفر اما المعادلة $y''+9y=x\cos x$ فهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة لان الطرف الأيمن فيها لا يساوي صفر.

المؤثر D

يعرف المؤثر D بانه المشتقة الأولى بالنسبة الى المتغير x والتي تكون بالشكل $\frac{d}{dx}$ أي ان

$$D=\frac{d}{dx}\qquad ,D^2=\frac{d^2}{dx^2}\ ,D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

وعليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) بالشكل التالي

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x)$$

<u>**مثال:**</u> لو أعدنا كتابة المعادلة $y'''-y''-4y'+4y=0$ بدلالة المؤثر فإنها ستكون بالشكل

$$(D^3-D^2-4D+4)y=0$$

<u>**ملاحظة:**</u> عند حل المعادلة (1) فان الحل سيتكون من جزأين الجزء الأول هو حل المعادلة المتجانسة وهو ما يعرف بالحل العام او الدالة المتممة y_c اما الجزء الثاني فهو حل المعادلة غير المتجانسة وهو ما يعرف بالحل الخاص y_p وعليه يكون الحل بالصيغة $y=y_c+y_p$.

وسوف ندرس الآن الحل العام أو الدالة المتممة للجزء المتجانس من المعادلة (1) فنعيد كتابة المعادلة بالصيغة

$$F(D) = (D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_{n-1})(D - m_n) = 0 \dots (*)$$

وهي ما تعرف بالمعادلة المميزة للمعادلة (1) والجذور $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ تسمى الجذور المميزة ويمكن كتابتها بصيغة أخرى على اعتبار ان كل $D = m$ ولتوضيح ذلك ناخذ المعادلة

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0 \Rightarrow (D^3 - 2D^2 - 4D + 8)y = 0$$

فالمعادلة المميزة تكتب بالشكل

$$m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0$$

ويمكن حل هذه المعادلة بالطرق التي درسناها سابقا في المرحلة المتوسطة ومنها التحليل بالتجربة أو الدستور أو تجزئة الحدود حسب المعادلة التي لدينا وهناك طريقة أخرى تسمى طريقة التخمين سندرسها إن شاء الله عند حل بعض التمارين التي تحتاج إلى ذلك.

هناك ثلاث حالات لجذور المعادلة $(*)$ وهي:

أولاً: الجذور حقيقية مختلفة أي ان $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \cdots \neq m_{n-1} \neq m_n$ عندئذ تكون الدالة المتممة بالشكل

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

تمارين عن الحالة الاولى (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $2y'' + 5y' - 12y = 0$

2) $y'' - 4y = 0$

3) $(D^2 + 5D + 6)y = 0$

4) $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$

ثانياً: الجذور حقيقية مكررة n من المرات فيكون الحل المتمم بالصيغة

$$y_c = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} + c_3x^2e^{mx} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{mx}$$

تمارين عن الحالة الثانية (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $(D^4 - 8D^2 + 16)y = 0$

2) $(D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4)y = 0$

3) $(D^2 + 4D + 4)y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = -1$

ثالثاً: الجذور مركبة (تخيلية) أي ان الجذور تكون بالصيغة $a \mp bi$ فيكون الحل بالصورة

$$y_c = (A\cos bx + B\sin bx)e^{ax}$$

تمارين عن الحالة الثالثة (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $y'' + 4y = 0$

2) $y'' + 16y = 0$

3) $y'' + y' + y = 0$

واجب بيتي HOMEWORK

١- جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$

2) $2y'' - 3y' = 0$

3) $y'' - 4y' + 4y = 0$

4) $y'' + 2y' + 5y = 0$

5) $y'' + 9y = 0$

6) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

7) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$

8) $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$

9) $y'' + y' - 6y = 0$

10) $y'' + 2y' - 15y = 0$

11) $y'' + 4y' + 6y = 0$

12) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

13) $y''' - 7y' - 6y = 0$

14) $y''' - 9y'' + 23y' - 15y = 0$

15) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

16) $y'' - 4y' + y = 0$

17) $y''' - y'' - y' - 2y = 0$

18) $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$

٢- أوجد الحل الخص لمسائل القيم التالية:

1) $y''' + 2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 8, y''(0) = -4$

2) $y''' - 6y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -6$

3) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 0$

4) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3 \quad , y'(0) = -1$