المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ولكنها ليست من الدرجة الأولى

النوع الثالث: معادلات تفاضلية قابلة للحل في x

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية

$$F(x,y,p)=0\ \dots\dots\dots(1)$$

من أجل x أي أن

$$x=f(y,p)\ \dots\dots\dots(2)$$

فإننا يمكن أن نحل المعادلة عن طريق الخطوات التالية:

١- إعادة ترتيب المعادلة (1) بحيث تصبح بالشكل $x=f(y,p)$ أي نكتب x بدلالة y,p

٢- نفاضل x بالنسبة لـ y. (نفاضل = نشتق).

٣- نعوض عن $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$ فتصبح المعادلة خالية من x وتكون بدلالة $\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)$.

٤- نجد الحل من اجل p بدلالة y وليكن هذا الحل هو $\psi(x,p,c)=0$.

٥- حذف البارامتر p بين المعادلتين في النقطة ٣ ومعادلة (2) فنحصل على علاقة تحوي x,y,c وهي الحل المطلوب.

ملاحظة: قد نحصل من احدى العلاقات الناتجة على حل منفرد ويسمى الحل منفرداً إذا لم يكن ناتجاً عن اجراء عملية التكامل.

ملاحظة: في بعض الأحيان يكون من الصعب حذف البارامتر p وعليه نعبر عن كل من x و y بدلالة p ويعتبر كل منهما حل للمعادلة.

تمارين عن النوع الثالث (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام والمنفرد إن وجد للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $y^2p^2-3xp+y=0$

2) $x=p+\frac{1}{p}$

معادلة كليروت

تسمى المعادلة من الصيغة

$$y = px + f(p) \dots (1)$$

معادلة كليروت.

باشتقاق المعادلة (1) بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

أو

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

بالقسمة على العامل $[x + f'(p)]$ نجد ان

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

بالتكامل نحصل على

$$p = c$$

بتعويض $p = c$ في المعادلة (1) نحصل على الحل المطلوب وهو

$$y = cx + f(c)$$

لذا فإن حل معادلة كليروت يتم الحصول عليه بكتابة c بدلاً من p.

واجب بيتي HW

جد الحل العام والمنفرد ان وجد للمعادلات التفاضلية التالية:

معادلات قابلة للحل في p

1) $xyp^3 + (x^2 - 2y^2)p^2 - 2xyp = 0$

2) $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

3) $yp^2 + (x - y)p - x = 0$

4) $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

5) $p^3 + 2xp^2 - y^2p^2 - 2xy^2p = 0$

معادلات قابلة للحل في y

6) $x + 2(xp - y) + p^2 = 0$

7) $y - 2px = \tan^{-1}(xp^2)$

8) $p^2 - py + x = 0$

9) $p^3 + p = e^y$

معادلات قابلة للحل في x

10) $x = \frac{p}{1 + p^2} + \tan^{-1} p$

11) $x - yp = ap^2$

12) $x = y + a\ln p$

13) $x = y + p^2$