نظرية الاعداد

المرحلة الرابعة كلية التربية للعلوم الصرفة

م.م حيدر سوادي حمد

ا.د سنان عمر ابراهيم

المحاضرة الثانية

قاعدة الترتيب الجيد والاستنتاج (الاستقراء) الرياضي

تعريف: يقال عن علاقة $\preccurlyeq$ على مجموعة غير خالية A انها علاقة ترتيب جزئي (Partial order relation) اذا كانت:

١) $\preccurlyeq$ علاقة منعكسة (Reflexive) على A. أي ان $a \preccurlyeq a$ لكل $a \in A$.
٢) $\preccurlyeq$ علاقة متخالفة او تخالفية (Antisymmetric) على A. أي انه اذا كان $a \preccurlyeq b$ و $b \preccurlyeq a$ فان $a = b$.
٣) $\preccurlyeq$ علاقة متعدية (Transitive) على A. أي انه اذا كان $a \preccurlyeq b$ و $b \preccurlyeq c$ فان $a \preccurlyeq c$.

ويقال عن $(A, \preccurlyeq)$ انها مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا (Partially ordered set) اذا كانت $A \neq \phi$ و $\preccurlyeq$ علاقة ترتيب جزئي على A.

مثال:

١) اذا كان $A \in \{N, Z, Q, R\}$ وكان $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \leq b$ فان $(A, \preccurlyeq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا.
٢) اذا كان $X \neq \phi$, فان $(P(X), \subseteq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا لان $P(X) \neq \phi$ و $\subseteq$ علاقة ترتيب جزئي على $P(X)$.
٣) اذا كانت $A = \{١,٢,٣,٤\}$,
$\preccurlyeq = \{(١,١), (٢,٢), (٣,٣), (٤,٤), (١,٢), (٢,٣), (١,٣), (٢,٤), (١,٤)\}$ فان $\preccurlyeq$ علاقة ترتيب جزئي على A.

تعريف: اذا كانت $(A, \preccurlyeq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا, فيقال عن $a \in A$ انه عنصر اول او عنصر اصغر (First or least smallest element) للمجموعة A وتكتب $\iota(A) = a$ اذا كان $a \preccurlyeq x$ لكل $x \in A$.

مثال:

١) $(N,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا, $\iota(N) = ٠$.

٢) اذا كانت $X \neq \phi$ فان $(P(X),\subseteq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا لان $\iota(P(X)) = \phi$ لان $A \supseteq \phi$ لكل $A \in P(X)$.

٣) اذا كانت $A = \{٢,٤,٦\}$, وكانت $\preccurlyeq$ معرفة على A كالاتي: $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \backslash b$, $a, b \in A$, اذا $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا, $\iota(A) = ٢$.

تعريف: يقال عن مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا $(A,\preccurlyeq)$ انها مجموعة مرتبة ترتيبا جيدا (Well ordered set) اذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من A تحتوي عنصرا أولا.

مثال:

١) اذا كانت $A = \{١,٢,٣,٤\}$, فان $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جيدا لان $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا وكل مجموعة جزئية من A تحتوي عنصر اول.

٢) اذا كانت $A = \{١,٢,٤,٨\}$, $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \backslash b$, فان $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جيدا لان $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا وكل مجموعة جزئية من A تحتوي عنصر اول.

٣) اذا كانت $A=[٠,١]$, فان A مجموعة ليست مرتبة ترتيبا جيدا لان $B=[٠,١] \subset A$ لا تحتوي على عنصر اول.

٤) $(Z,\leq)$ مجموعة ليست مرتبة ترتيبا جيدا لان $\{-١,-٢,-٣,\ldots\}$ مجموعة جزئية منها ولا تحتوي على عنصر اول (عنصر اصغر).

قاعدة الترتيب الجيد (Well ordering principle)

$(Z,\leq)$ مجموعة ليست مرتبة ترتيبا جيدا

مبرهنة:

١) لا يوجد عدد صحيح بين الصفر والواحد.

٢) الواحد اصغر عدد موجب.

٣) اذا كان $n \in Z$, يوجد $m \in Z$ بحيث ان $n < m < n + ١$.

البرهان:

١) نفرض وجود $x \in N$ بحيث ان $٠ < x < ١$. اذا $S = \{m \in N: ٠ < m < ١\} \neq \phi$ ولكن N مرتبة جيدا, $\phi \neq S \subseteq N$. اذا S تمتلك عنصر اول (اصغر) وليكن n. اذا $٠ < x <$

١ وعليه فان $٠ < n^٢ < x < ١$ وهذا يعني ان $n^٢ \in S$ و $n^٢ < n$ وهذا تناقض كون n عنصر اول في S. اذا $S = \phi$.

٢) بما ان $S = \{m \in N: ٠ < m < ١\} \neq \phi$ حسب (١). اذا الواحد هو اصغر عدد صحيح موجب.

٣) نفرض وجود $m \in Z$ بحيث ان $n < m < n + ١$. اذا $٠ < m - n < ١$ وهذا يناقض (١). اذا لا يوجد $m \in Z$ بحيث ان $n < m < n + ١$.

ولتوضيح العلاقة بين قاعدة الترتيب الجيد والاستقراء الرياضي نورد المبرهنة الاتية:

مبرهنة:

العبارات الاتية متكافئة

١) قاعدة الاستقراء الرياضي: اذا كانت B مجموعة جزئية من N* وكان $١ \in B$ و $(n \in B \Rightarrow n + ١ \in B)$ فان B=N*.

٢) القاعدة العامة للاستقراء الرياضي: اذا كانت B مجموعة جزئية من N* وكان $١ \in B$ و ($n \in B$ عندما $m \in B$ لكل m<n) فان B=N*.

٣) لكل مجموعة جزئية غير خالية من N* عنصر اول (اصغر).

البرهان: سنثبت (١) $\Leftarrow$ (٢) $\Leftarrow$ (٣) $\Leftarrow$ (١)

١) (1) $\Leftarrow$ (٢) لتكن $B \subseteq N$ بحيث ان $١ \in B$ و ($n \in B$ عندما $m \in B$ لكل m<n) نفرض E=$\{x \in N: y \in B \ \ \forall y \leq x\}$, اذن $E \subseteq B$ وعليه فان E=N*. ولإثبات ذلك لاحظ ان $١ \in E$ لان $١ \in B$ واذا كان $n \in E$ فان $y \in B$ لكل $y \leq n$. اذا $(n + ١) \in B$ وعليه فان $y \in B$ لكل $y \leq n + ١$ وهذا يعني ان $(n + ١) \in E$. اذا *E=N* حسب *(1)*.

٢) (2) $\Leftarrow$ (٣) لتكن B مجموعة جزئية غير خالية من N* و B لا تمتلك عنصر اول. اذا $1 \notin B$ وعليه فان $١ \in$ N*-B. اذا كانت $m \in$ N*-B لكل $m < n$, فان $n \in$ N*-B لانه اذا كان العكس فان n هي العنصر الأول للمجموعة B وهذا يناقض الفرض. اذا N*-B=N* حسب (ب) ومنه ينتج $B = \phi$. اذا مجموعة جزئية غير خالية من N* عنصر اول.

٣) (3) $\Leftarrow$ (١) لتكن B مجموعة جزئية منN* بحيث ان $١ \in B$ و $n \in B \Rightarrow n + ١ \in B$ ولتكن $\grave{B}$=N*-B اذا" اذا كانت $\grave{B} \neq \phi$ فان $\grave{B}$ تمتلك عنصر اول وليكن m, اذا $m \neq 1$ لان $١ \in B$ وعليه فان m>١. لكن m-١<m. اذا $(m - ١) \notin \grave{B}$, وعليه فان $m - ١ \in B$, وبالتالي فان $m = (m - ١) + ١ \in B$, اذا $m \notin \grave{B}$ وهذا تناقض. إذا $\grave{B} = \phi$ وعليه فان B=N*.

ملاحظة:

لاثبات صحة العبارة p(n) لجميع قيم $n \in$ N* يكفي ان نبرهن على ان P(١) عبارة صحيحة ونثبت صدق العبارة P(m) يؤدي الى صدق العبارة P(m+١), لانه اذا كانت $S = \{n \in N^*:\ P(n)$ صحيحة عبارة$\}$, فان $S \ni$ ١ كما انه اذا كان $m \in S$ فان $m +$ ١ $\in S$ وعليه فان S=N*.