

## نظرية الاعداد

### المرحلة الرابعة كلية التربية للعلوم الصرفة

ا.د سنان عمر ابراهيم

م.م حيدر سوادى حمد

#### المحاضرة الثانية

#### قاعدة الترتيب الجيد والاستنتاج (الاستقراء) الرياضي

تعريف: يقال عن علاقة  $\preceq$  على مجموعة غير خالية A انها علاقة ترتيب جزئي (Partial order relation) اذا كانت:

- (1)  $\preceq$  علاقة منعكسة (Reflexive) على A. أي ان  $a \preceq a$  لكل  $a \in A$ .
  - (2)  $\preceq$  علاقة متخالفة او تخالفية (Antisymmetric) على A. أي انه اذا كان  $a \preceq b$  و  $b \preceq a$  فان  $a = b$ .
  - (3)  $\preceq$  علاقة متعدية (Transitive) على A. أي انه اذا كان  $a \preceq b$  و  $b \preceq c$  فان  $a \preceq c$ .
- ويقال عن  $(A, \preceq)$  انها مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا (Partially ordered set) اذا كانت  $A \neq \emptyset$  و  $\preceq$  علاقة ترتيب جزئي على A.

مثال:

- (1) اذا كان  $A \in \{N, Z, Q, R\}$  وكان  $a \leq b \iff a \preceq b$  فان  $(A, \preceq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا.
- (2) اذا كان  $X \neq \emptyset$ , فان  $(P(X), \subseteq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا لان  $P(X) \neq \emptyset$  و  $\subseteq$  علاقة ترتيب جزئي على  $P(X)$ .
- (3) اذا كانت  $A = \{1,2,3,4\}$ ,  
 $\preceq = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3), (1,3), (2,4), (1,4)\}$  فان  $\preceq$  علاقة ترتيب جزئي على A.

تعريف: اذا كانت  $(A, \leq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا, فيقال عن  $a \in A$  انه عنصر اول او عنصر اصغر (First or least smallest element) للمجموعة  $A$  وتكتب  $i(A) = a$  اذا كان  $a \leq x$  لكل  $x \in A$ .

مثال:

- (1)  $(N, \leq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا,  $i(N) = 0$ .
- (2) اذا كانت  $X \neq \emptyset$  فان  $(P(X), \subseteq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا لان  $i(P(X)) = \emptyset$  لان  $\emptyset \subseteq A$  لكل  $A \in P(X)$ .
- (3) اذا كانت  $A = \{2,4,6\}$ , وكانت  $\leq$  معرفة على  $A$  كالآتي:  $a \leq b \Leftrightarrow a \setminus b$ ,  $a, b \in A$ , اذا  $(A, \leq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا,  $i(A) = 2$ .

تعريف: يقال عن مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا  $(A, \leq)$  انها مجموعة مرتبة ترتيبيا جيدا (Well ordered set) اذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من  $A$  تحتوي عنصرا اولاً.

مثال:

- (1) اذا كانت  $A = \{1,2,3,4\}$ , فان  $(A, \leq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جيدا لان  $(A, \leq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا وكل مجموعة جزئية من  $A$  تحتوي عنصر اول.
- (2) اذا كانت  $A = \{1,2,4,8\}$ ,  $a \leq b \Leftrightarrow a \setminus b$ , فان  $(A, \leq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جيدا لان  $(A, \leq)$  مجموعة مرتبة ترتيبيا جزئيا وكل مجموعة جزئية من  $A$  تحتوي عنصر اول.
- (3) اذا كانت  $A = [0,1]$ , فان  $A$  مجموعة ليست مرتبة ترتيبيا جيدا لان  $B = [0,1] \subset A$  لا تحتوي على عنصر اول.
- (4)  $(Z, \leq)$  مجموعة ليست مرتبة ترتيبيا جيدا لان  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  مجموعة جزئية منها ولا تحتوي على عنصر اول (عنصر اصغر).

قاعدة الترتيب الجيد (Well ordering principle)

$(Z, \leq)$  مجموعة ليست مرتبة ترتيبيا جيدا

مبرهنة:

- (1) لا يوجد عدد صحيح بين الصفر والواحد.
- (2) الواحد اصغر عدد موجب.
- (3) اذا كان  $n \in Z$ , يوجد  $m \in Z$  بحيث ان  $n < m < n + 1$ .

البرهان:

(١) نفرض وجود  $x \in N$  بحيث ان  $0 < x < 1$ . اذا  $S = \{m \in N: 0 < m < 1\} \neq \phi$  ولكن  $N$  مرتبة جيدا,  $\phi \neq S \subseteq N$ . اذا  $S$  تمتلك عنصر اول (اصغر) وليكن  $n$ . اذا  $0 < x < 1$  وعليه فان  $0 < n^2 < x < 1$  وهذا يعني ان  $n^2 \in S$  و  $n^2 < n$  وهذا تناقض كون  $n$  عنصر اول في  $S$ . اذا  $S = \phi$ .

(٢) بما ان  $S = \{m \in N: 0 < m < 1\} \neq \phi$  حسب (١). اذا الواحد هو اصغر عدد صحيح موجب.

(٣) نفرض وجود  $m \in Z$  بحيث ان  $n < m < n + 1$ . اذا  $0 < m - n < 1$  وهذا يناقض (١). اذا لا يوجد  $m \in Z$  بحيث ان  $n < m < n + 1$ .

ولتوضيح العلاقة بين قاعدة الترتيب الجيد والاستقراء الرياضي نورد المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

العبارات الآتية متكافئة

(١) قاعدة الاستقراء الرياضي: اذا كانت  $B$  مجموعة جزئية من  $N^*$  وكان  $1 \in B$  و  $(n \in B \Rightarrow n + 1 \in B)$  فان  $B = N^*$ .

(٢) القاعدة العامة للاستقراء الرياضي: اذا كانت  $B$  مجموعة جزئية من  $N^*$  وكان  $1 \in B$  و  $(n \in B$  عندما  $m < n$  لكل  $m \in B$ ) فان  $B = N^*$ .

(٣) لكل مجموعة جزئية غير خالية من  $N^*$  عنصر اول (اصغر).

البرهان: سنثبت  $(1) \Leftarrow (2) \Leftarrow (3) \Leftarrow (1)$

(١)  $\Leftarrow$  (٢) لتكن  $B \subseteq N$  بحيث ان  $1 \in B$  و  $(n \in B$  عندما  $m < n$  لكل  $m \in B$ )

نفرض  $E = \{x \in N: y \in B \forall y \leq x\}$ , ان  $E \subseteq B$  وعليه فان  $E = N^*$ . ولإثبات ذلك

لاحظ ان  $1 \in E$  لان  $1 \in B$  واذا كان  $n \in E$  فان  $y \in B$  لكل  $y \leq n$ . اذا  $(n +$

$1) \in B$  وعليه فان  $y \in B$  لكل  $y \leq n + 1$  وهذا يعني ان  $(n + 1) \in E$ . اذا  $E = N^*$

حسب (١).

(٢)  $\Leftarrow$  (٣) لتكن  $B$  مجموعة جزئية غير خالية من  $N^*$  و  $B$  لا تمتلك عنصر اول. اذا

$1 \notin B$  وعليه فان  $1 \in N^* - B$ . اذا كانت  $m \in N^* - B$  لكل  $m < n$ , فان  $n \in N^* - B$  لانه

اذا كان العكس فان  $n$  هي العنصر الأول للمجموعة  $B$  وهذا يناقض الفرض. اذا  $N^* - B = N^*$

حسب (ب) ومنه ينتج  $B = \phi$ . اذا مجموعة جزئية غير خالية من  $N^*$  عنصر اول.

(3)  $\Leftrightarrow$  (1) لتكن  $B$  مجموعة جزئية من  $N^*$  بحيث ان  $1 \in B$  و  $n \in B \Rightarrow n + 1 \in B$  ولتكن  $B = N^*$  اذا كانت  $B \neq \phi$  فان  $B$  تمتلك عنصر اول وليكن  $m$ , اذا  $m \neq 1$  لان  $1 \in B$  وعليه فان  $m > 1$ . لكن  $m - 1 < m$ . اذا  $(m - 1) \notin B$ , وعليه فان  $m - 1 \in B$ , وبالتالي فان  $m = (m - 1) + 1 \in B$ , اذا  $m \notin B$  وهذا تناقض. اذا  $B = \phi$  وعليه فان  $B = N^*$ .

ملاحظة:

لاثبات صحة العبارة  $p(n)$  لجميع قيم  $n \in N^*$  يكفي ان نبرهن على ان  $P(1)$  عبارة صحيحة ونثبت صدق العبارة  $P(m)$  يؤدي الى صدق العبارة  $P(m+1)$ , لانه اذا كانت  $S = \{n \in N^* : P(n) \text{ صحيحة عبارة}\}$ , فان  $1 \in S$  كما انه اذا كان  $m \in S$  فان  $m + 1 \in S$  وعليه فان  $S = N^*$ .

جامعة قطر