نظرية الاعداد

المرحلة الرابعة كلية التربية للعلوم الصرفة

م.م حيدر سوادي حمد

ا.د سنان عمر ابراهيم

متتابعة فيبوناتشي (Fibonacci Sequence)

تنسب المتتابعة ....,1,1,2,3,5,8,13,21,34 الى الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي (١١٧٠-١٢٥٠ م)، والذي نقل في كتابة (Liber Abaci) الأرقام العربية الى اوربا عام ١٢٠٢م، ويقول البعض ان تلك المتتابعة معروفة من قبل وتعرف كالاتي:

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ ، } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{لكل} \quad n \in N^*$$

اثبت ان

(أ) كلا من f_{3n-1} ، f_{3n-2} عدد فردي بينما f_{3n} عدد زوجي لكل $n \in N^*$

(ب) $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ لكل $n \in N^*$

البرهان: (بالاستقراء الرياضي على n)

(أ) اذا كان n=1 فأن $f_{3n-2} = f_1 = 1$ ، $f_{3n-1} = f_2 = 1$ بينما $f_{3n} = f_3 = 2$ اذا كان n=1 نجد ان كلا من f_{3n-1} ، f_{3n-2} عدد فردي بينما f_{3n} عدد زوجي

والان لنفرض ان العبارة الصحيحة (صادقة) عندما n=m، اذا كل من f_{3m-1} ، f_{3m-2} عدد فردي بينما f_{3m} عدد زوجي ولإثبات صحة العبارة عندما n=m+1، لاحظ ان $f_{3(m+1)-2} = f_{3m+1} = f_{3m} + f_{3m-1}$ حسب تعريف متتابعة فيبوناشي لكن f_{3m} عدد زوجي، f_{3m-1} عدد فردي بالفرض، ومجموع عددين أحدهما فردي والأخر زوجي يكون عددا فرديا. وحيث ان $f_{3(m+1)-1} = f_{3m+1} = f_{3m+1} + f_{3m}$ و f_{3m+1} عدد فردي، f_{3m} عدد زوجي اذا f_{3m+2} عدد فردي حيث ان $f_{3(m+1)} = f_{3m+3} = f_{3m+2} + f_{3m+1}$ حسب تعريف متتابعة فيبوناشي لكن كلا من f_{3m+1} ، f_{3m+2} عدد

فردي، كما ان أثبتنا، اذا f_{3m+3} عدد زوجي وعليه فأن كلا من f_{3n-1}, f_{3n-2} عدد فردي بينما f_{3n} عدد زوجي لكل $n \in N^*$

(ب) نفرض أن $P(n): f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ اذا عندما $n = 1$ نجد ان $R.H.S = (-1)^1 = -1, L.H.S = f_2^2 - f_1 f_3 = 1^2 - 1(2) = -1$ ، وعليه فأن الطرفين متساويان وبالتالي فأن $p(1)$ صحيحة.

والان لنفرض $p(m)$ صحيحة. اذا $f_{m+1}^2 - f_m f_{m+2} = (-1)^m$ ولإثبات صحة $p(m+1)$ ولاحظ ان $f_{m+3} = f_{m+2} + f_{m+1}$ $f_{m+2} = f_{m+1} + f_m$ حسب تعريف متتابعة فيبوناشي، وبالتالي فأن

$$\begin{aligned}
f_{m+2}^2 - f_{m+1} f_{m+3} &= f_{m+2}^2 - f_{m+1}(f_{m+2} + f_{m+1}) \\
&= f_{m+2}^2 - f_{m+1} f_{m+2} - f_{m+1}^2 \\
&= f_{m+2}(f_{m+2} - f_{m+1}) - f_{m+1}^2 = f_{m+2} f_m - f_{m+1}^2 \\
&= -(f_{m+1}^2 - f_{m+2} . f_m) = -(-1)^m = (-1)^{m+1}
\end{aligned}$$

اذا p(m+1) صحيحة، فأن p(n) صحيحة لكل $n \in N^*$.

والان الى المبرهنة الاتية التي توضح بأنه قد يكون من المفيد أحيانا اثبات صحة علاقة لكل من $a \geq b$

مبرهنة ١-٢-٣: العبارتان الاتيتان متكافئتان

(أ) قاعدة الاستنتاج (الاستقراء) الرياضي.

(ب) لتكن $b \in Z$ ، $s \subseteq T = \{a \in Z \mid a \geq b\}$ بحيث ان $b \in S$ إذا كان $n \in s$ فأن $n+1 \in s$ ، فأن S=T

البرهان:

(أ)⇐ (ب)

لتكن $E=\{a\in z \mid a\in E \Leftrightarrow (a-1)+b\in S\}$ اذا $1\in E$، لان $(1-1)+b=b\in S$ وحيث ان $(a-1)+b\in s \Rightarrow a\geq 1$, $\forall a\in E$ اذا $n+1\in E$ ، وعليه فان $E=N^*$ حسب قاعدة الاستقراء الرياضي، وبالتالي فان $n\in E$ لكل $n=N^*$، وعليه فأن $(n-1)+b\in s$ لكل $n\in N^*$ لكن أي $a\geq b$ يمكن التعبير عنه بالشكل $a=(n-1)+b$، $a\in T$ اذا $T\subseteq S$ وعليه فأن S=T

(ب)⇐ (أ)

لتكن $E\subseteq N^*$ تحقق فرضيتي الاستقراء الرياضي، ولكي نثبت ان $E=N^*$ نفرض ان S مجموعة معرفة كالاتي : $a\in S \Leftrightarrow a-b+1\in E$ اذا $b\in S$، لان $(b-b)+1=1\in E$ لكن $a\geq b \Leftrightarrow a-b+1\in E$ ، وعليه فأن $a-b+2\in E$ وبالتالي فأن $a+1\in S$ اذا $S=\{a\in Z \mid a\geq b\}$ حسب (ب) لكن أي عدد صحيح موجب m يمكن التعبير عنه بالشكل $m=(r-b)+1$ ، $r\geq b$ اذا $1\leq m\in E$ وعليه فأن $E=N^*$.

مثال (٦):

اثبت ان (أ) $2^n > n$ لكل $n = N^*$

(ب) $2^n > 5n$ لكل $n \geq 5$

الاثبات:

(أ) إذا كان n=1، فأن $2^1 = 2 > 1$ وعليه فأن العبارة أعلاه صحيحة عندما n=1 والان لنفرض ان العبارة صحيحة عندما n=m إذا $2^m > m$ ، لكن 2^{m+1} ، $2m \geq m+1$ إذا $2^{m+1} > m+1$ وعليه فأن العبارة أعلاه صحيحة عندما n=m+1، وبالتالي $2^n > n$ لكل $n = N^*$

(ب) لتكن $p(n): \forall n \geq 5, 2^n > 5n$ اذا عندما n=5 ، نجد ان $2^5 = 32 > 25$ وعليه فأن $p(5)$ عبارة صحيحة والان لنفرض ان $p(m)$ صحيحة اذا $2^n > 5m$ لكل $5 \leq m < k$ ، ولإثبات صحة العبارة $p(m+1)$ ولاحظ ان $2^m > 5m \Rightarrow 2^{m+1} > 10m = 5m + 5m > 5m + 5 = 5(m+1)$ وعليه فأن $p(m+1)$ عبارة صحيحة اذا $2^n > 5n$ لكل $n \geq 5$

مثال (٧):

اثبت ان $\forall n \geq -1, 2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 > 0$

الاثبات:

لتكن $p(n): \forall n \geq -1, 2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 > 0$ اذا عندما n=1 نجد ان $2(-1)^3 - 9(-1)^2 + 13(-1) + 25 = 1 > 0$ ، وبالتالي فأن p(1) صحيحة والان لنفرض ان $p(m)$ صحيحة اذا $2m^3 - 9m^2 + 13m + 25 > 0$, $-1 \leq m < n$

ولإثبات صحة p(m+1) لاحظ ان

$$2(m+1)^3-9(m+1)^2+13(m+1)+25=(2m^3-9m^2+13m+25)+6(m-1)^2$$

لكن $3m^3-9m^2+13m+25>0$ ، لان p(m) صحيحة ، $6(m-1)^2\geq 0$ لكل $m\in N^*$ اذا

$2(m+1)^3-9(m+1)^2+13(m+1)+25>0$ وعليه فأن p(m+1) صحيحة وبالتالي فأن p(n) صحيحة

لكل , $n\geq -1$

مثال (٨):

اذا كان $r, n\in N$ ، فاثبت ان $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\in N$ لكل $0\leq r\leq n$

الاثبات:

اذا كانت n=0,1 ، فأن $\binom{0}{0}=1\in N$, $\binom{1}{0}=1\in N$, $\binom{1}{1}=1\in N$

وعليه فأن العلاقة أعلاه صحيحة عندما n=0,1 والان لنفرض ان $\binom{m}{r}\in N$ ، $r\leq m\leq n$ ولكي نثبت

ان $\binom{m+1}{r}\in N$ ، $0\leq r\leq (m+1)$

لاحظ ان $\binom{m+1}{0}=1\in N$ ، $\binom{m+1}{m+1}=1\in N$ كما ان

$$\binom{m+1}{r}=\binom{m}{r}+\binom{m}{r-1}\text{.............}(1)\quad \text{لكل } 1\leq r\leq m$$

تسمى العلاقة (1) قاعدة باسكال والتي يجب ان تسمى قاعدة الكرخي لكن $\binom{m}{r}\in N$ ، $\binom{m}{r-1}\in N$

حسب فرضية الاستنتاج الرياضي اذا

$\binom{m+1}{r}\in N$ لكل $1\leq r\leq m+1$ وعليه فأن $\binom{n}{r}\in N$ لكل $0\leq r\leq n$