المعادلة التفاضلية Differential Equation (D.E)

وهي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير معتمد وليكن y وواحد او أكثر من المشتقات التفاضلية $y', y'', \dots$ أي انها على الصورة

$$F(x, y, y', y'', \dots.) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية اعتيادية.

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x, y مستقلان وكان z متغير معتمد قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x, y جزئياً، فالمعادلة تسمى معادلة تفاضلية جزئية وتكون بالصورة

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots \dots \dots \dots\right) = 0$$

ولتوضيح ذلك نأخذ المعادلات التفاضلية التالية

$$dy = \cos x \, dx \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \qquad (2)$$

$$(y + c)^2 \frac{dx}{dz} + z \frac{dy}{dz} - (y + a) = 0 \qquad (3)$$

$$y = x \frac{dy}{dx} + r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (4)$$

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = nxz \qquad (5)$$

فالمعادلات من $(4) - (1)$ معادلات تفاضلية اعتيادية أما المعادلة (5) فهي معادلة تفاضلية جزئية.

رتبة المعادلة التفاضلية Order of D.E

وهي رتبة أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.

درجة المعادلة التفاضلية Degree of D.E

وهي أس (قوة) رتبة المعادلة التفاضلية بشرط ان تكون المعادلة خالية من الجذور والقوى الكسرية.

وكمثال على ذلك نلاحظ أن المعادلة (1) من الرتبة الأولى والدرجة الأولى والمعادلة (2) من الرتبة الثانية والدرجة الأولى والمعادلة (4) من الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

حل المعادلة التفاضلية Solution of D.E

تسمى الدالة $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ إذا كانت:

(١) قابلة للاشتقاق n من المرات.

(٢) تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال: أثبت أن $y = A\sin x + B\cos x$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث A, B ثوابت اختيارية.

الحل:

باشتقاق العلاقة مرتين نحصل على

$$y = A\sin x + B\cos x \qquad (1)$$

$$y' = A\cos x - B\sin x \qquad (2)$$

$$y'' = -A\sin x + B\cos x \qquad (3)$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) نحصل على $y'' + y = 0$ ومن هذا نستنتج أن الحل المعطى يحقق المعادلة التفاضلية.

الحل العام والحل الخاص General Solution and Particular Solution

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية.

اما الحل الخاص فهو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية ويكون خالياً من الثوابت الاختيارية وقد نحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة، وسنتطرق الى هذين النوعين من الحلول بصورة مفصلة في الفصول القادمة.

اشتقاق أو تكوين المعادلة التفاضلية Derivative or Form D.E

نستطيع اشتقاق او تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية الموجودة في العلاقة التي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية وذلك باشتقاق العلاقة أو الحل بالاعتماد على عدد الثوابت الاختيارية وبواسطة إجراءات حسابية معينة نحصل على الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية المطلوبة.

مثال: من العلاقة $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ كون معادلة تفاضلية خالية من الثوابت الاختيارية a,b,c .

الحل:

باشتقاق العلاقة المعطاة نحصل على

$$2x+2yy'+2a+2by'=0$$

بالقسمة على 2 وجمع الحدود المتشابهة

$$x+a+(y+b)y'=0 \qquad (1)$$

نشتق مرة ثانية فنحصل على

$$1+(y+b)y''+(y')^2=0 \qquad (2)$$

نشتق مرة ثالثة فنحصل على

$$(y+b)y'''+y'y''+2y'y''=0$$

$$(y+b)y'''+3y'y''=0 \qquad (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن

$$1+(y')^2=-(y+b)y'' \qquad (4)$$

ومن المعادلة (3) نجد أن

$$3y'y'' = -(y+b)y''' \qquad (5)$$

وبقسمة المعادلة (4) على المعادلة (5) نحصل على

$$\frac{1+(y')^2}{3y'y''} = \frac{-(y+b)y''}{-(y+b)y'''} \Rightarrow [1+(y')^2]y''' - 3(y'')^2y' = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

تمارين (تحل في المحاضرة)

حدد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية التالية

1) $y' = 4x + y$

2) $(y'')^3 + (y')^4 + y = 0$

3) $[1+y']^{3/2} = y'''$

4) $y' + \dfrac{k}{y'} = 6$

5) $\dfrac{x+y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c$

أثبت ان كلاً من العلاقات التالية تمثل حلولاً للمعادلات التفاضلية المقابلة لها

1) $y = (x^3 + c)e^{-3x} \qquad , y' + 3y = 3x^2e^{-3x}$

2) $y = 2e^{3x} - 5e^{4x} \qquad , y'' - 7y' + 12y = 0$

3) $y = \dfrac{c}{x^2 - 2} \qquad , y' = \dfrac{2xy}{2 - x^2}$

اشتق (كوّن) المعادلات التفاضلية من العلاقات الاتية وذلك بحذف الثوابت الاختيارية:

1) $y = ax^3 + bx^2$

2) $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

3) $y\sin x - xy^2 = c$

4) $y = c_1\cos ax + c_2\sin ax$

5) $Ax^2 + By^2 = 1$

واجب بيتي HOMEWORK

أولاً: حدد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية التالية

1) $y' + x^2y = xe^x$

2) $y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \sin x$

3) $y^{(4)} + 3(y'')^5 + 5y = 0$

4) $x^2dy + y^2dx = 0$

5) $y'' + y\sin x = 0$

6) $y'' + x\sin y = 0$

7) $y^{(6)} + \left(y^{(4)}\right)\left(y^{(3)}\right) + y = x$

8) $(y')^3 = \sqrt{y'' + 1}$

ثانياً: تحقّق فيما إذا كان $y = e^x + 2e^{-x}$ يمثل حلاً للمعادلات التفاضلية التالية أم لا؟

1) $y'' - y = 0$

2) $y''' + 3y'' - 2y' = 2e^x - 4e^{-x}$

3) $2y'' + 2y' - 3y = e^{2x} + 5e^{-x}$

4) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$

ثانياً: أثبت ان كلاً من العلاقات التالية تمثل حلولاً للمعادلات التفاضلية المقابلة لها

1) $y = x + 3e^{-x}$, $y' + y = x + 1$

2) $y = e^x + 2x^2 + 6x + 7$, $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

3) $y = \dfrac{1}{1+x^2} \quad , (1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$

4) $y = \sec x \tan x \quad , y' - y\tan x = sec^3 x$

5) $y = e^{-x}\cos 3x \quad , y'' + 2y' + 10y = 0$

ثالثاً: اشتق (كوّن) المعادلات التفاضلية من العلاقات الاتية وذلك بحذف الثوابت الاختيارية:

1) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

2) $x^3 - 3x^2 y = c$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3$

4) $x^2 + y^2 = cx$

5) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

6) $y = ae^{2x} + be^{3x}$

7) $y = (c_1 + c_2 x)e^{x}$

8) $y = \ln(Ax)$

9) $\dfrac{x}{A} + \dfrac{y}{B} = 1$